PHẦN 1: KIẾN THỨC CƠ BẢN

BÀI HỌC 1: HAI QUY TẮC ĐẾM

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quy tắc cộng

Giả sử một công việc có thể thực hiện theo **phương án** A HOẶC phương án B.

Trong đó: Phương án A có m cách thực hiện. Phương án B có n cách thực hiện.

Vậy số cách để thực hiện công việc là m + n (cách)

VD1: Trong một cuộc thi, Ban tổ chức công bố danh sách các đề tài : 7 đề tài về thiên nhiên; 8 đề tài về lịch sử; 10 đề tài về con người; 6 đề tài về văn hóa. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đề tài ?

(ĐS: có 7 + 8 + 10 + 6 = 31 cách chọn)

VD2: An cần mua 1 áo sơ mi cỡ 39 hoặc 40. Trong đó cỡ 39 có 5 màu khác nhau, cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi An muốn mua 1 áo sơ mi thì có bao nhiêu cách chọn ?

(ĐS: An có 9 cách chọn)

VD3: Tại 1 trường học, có 41 học sinh chỉ giỏi văn; 22 học sinh chỉ giỏi toán. Nhà trường muốn cử một học sinh giỏi đi dự trại hè toàn quốc. Vậy nhà trường có bao nhiêu cách chọn ?

(ĐS: Có 41 + 22 = 63 cách chọn)

2. Quy tắc nhân

Giả sử môt công việc nào đó bao gồm hai **công đoạn** A và B. Công đoạn A có n cách thực hiện và công đoạn B có m cách thực hiện. khi đó công việc có thể được thực hiện bởi (n . m) cách.

VD1: Bạn An qua nhà Bình, rủ Bình qua nhà Cường đi chơi. Biết từ nhà An đến nhà Bình có 3 con đường đi khác nhau. Từ nhà Bình qua nhà Cường có 4 con đường đi khác nhau. Hỏi bạn An muốn tới nhà Cường có bao nhiêu cách chọn đường đi.
(ĐS: Có 3.4 = 12 cách)

VD2: Để làm nhãn cho một chiếc ghế, người ta quy ước nhãn gồm 2 phần: Phần thứ nhất là 1 chữ cái có trong 24 chữ cái, phần thứ 2 là một số nguyên dương nhỏ hơn 26. Hỏi có bao nhiêu ghế được dán nhãn khác nhau ?
(ĐS: Có 24.25 = 600 ghế được dán nhãn khác nhau)

I. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Phương pháp giải toán :

+ Xác định xem công việc được thực hiện theo phương án hay công đoạn (phân biệt phương án và công đoạn).
+ Tìm số cách thực hiện A và B.
+ Áp dụng qui tắc cộng hay nhân.

Bài 1: An đến văn phòng phẩm mua quà tặng bạn. Trong cửa hàng có 3 mặt hàng: Bút, vở, thước. Bút có 5 loại, vở có 4 loại, thước có 3 loại. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn quà gồm 1 bút, 1 vở và 1 thước ?

Hướng dẫn:

+ Có 5 cách chọn bút, ứng với 1 cách chọn bút có 4 cách chọn vở.

+ Ứng với mỗi cách chọn 1 bút, 1 vở có 3 cách chọn 1 thước.

Vậy có: 5.4.3 = 60 cách chọn

Bài 2: Từ các số tự nhiên, có thể lập được bao nhiêu tờ vé số mà mỗi vé số có 6 chữ số khác nhau ?

Hướng dẫn:

+ 6 số của tờ vé số có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$; $a_i \in \{0;1;2;...;10\}; i = \overline{1;6}$

a_1 có 10 cách chọn (được chọn cả chữ số 0 đứng đầu)

a_2 có 9 cách chọn (do không chọn lại chữ số đã chọn trước đó)

a_3 có 8 cách chọn (do không chọn lại chữ số đã chọn trước đó)

…

…

a_6 có 5 cách chọn

Vậy tất cả có: $\mathbf{10.9.8.7.6.5 = 151.200}$ tờ vé số

Bài 3: Trong một trường THPT, khối 11 có : 160 học sinh tham gia câu lạc bộ toán, 140 học sinh tham gia câu lạc bộ tin, 50 học sinh tham gia cả 2 câu lạc bộ. Hỏi khối 11 có bao nhiêu học sinh ?

Hướng dẫn:

Học sinh khối 12 là $\mathbf{160 + 140 - 50 = 250}$ học sinh (Quy tắc cộng mở rộng)

Bài 4: Một lớp có 40 học sinh, đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn thể thao bóng đá và cầu lông. Có 30 học sinh đăng ký bóng đá, 25 học sinh đăng ký cầu lông. Hỏi có bao nhiêu học sinh đăng ký cả 2 môn thể thao ?

Hướng dẫn:

+ Goi x là số học sinh đăng ký cả 2 môn thể thao, ta có: $\mathbf{40 = 30 + 25 - x \Rightarrow x = 15}$

Vậy có 15 học sinh đăng ký cả 2 môn thể thao

Bài 5: Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và 4 kiểu dây (kim loại, da, vải, nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm 1 mặt và một dây ?

Hướng dẫn: Có 3.4 = 12 (cách)

Bài 6: Một người vào cửa hàng ăn, người đó muốn chọn thực đơn gồm một món ăn trong 10 món, một loại hoa quả tráng miệng trong 5 loại hoa quả và một loại nước uống trong 4 loại nước uống. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thực đơn cho bữa ăn ?

Hướng dẫn:

+ Món ăn có: 10 cách chọn.

+ Ứng với cách chọn 1 món ăn, 1 loại hoa quả được chọn từ 5 loại nên có 5 cách chọn.

+ Ứng với mỗi cách chọn món ăn và 1 loại hoa quả thì một loại nước uống được chọn nên có 4 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân ta có: 10.5.4 = 200 cách chọn

Bài 7: Trong một đội văn nghệ có 8 bạn nam và 6 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một đôi song ca nam nữ ?

Hướng dẫn:

+ Chọn nam: có 8 cách chọn

+ Ứng với mỗi cách chọn nam, có 6 cách chọn nữa

Vậy tất cả có 6.8 = 48 cách chọn một đôi song ca.

Bài 8: Từ các chữ số 1; 5; 6; 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên :

a) Có 4 chữ số ?

b) Có 4 chữ số khác nhau ?

Hướng dẫn:

a) Số cần tìm có dạng: $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4}}$; $\mathbf{a_i \in \{1;5;6;7\}}$	b) Số cần tìm có dạng: $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4}}$; $\mathbf{a_i \in \{1;5;6;7\}}$
+ $\mathbf{a_1}$ có 4 cách chọn	+ $\mathbf{a_1}$ có 4 cách chọn
+ $\mathbf{a_2}$ có 4 cách chọn (Do các chữ số có thể giống nhau và lặp lại)	+ $\mathbf{a_2}$ có 3 cách chọn (Do chữ số chọn rồi thì không chọn lại)
+ $\mathbf{a_3}$ có 4 cách chọn	+ $\mathbf{a_3}$ có 2 cách chọn
+ $\mathbf{a_4}$ có 4 cách chọn	+ $\mathbf{a_4}$ có 1 cách chọn
Vậy có 4.4.4.4 = 256 số có 4 chữ số	Vậy có 4.3.2.1 = 24 số có 4 chữ số khác nhau

Bài 9: Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số trong đo các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau ?

Hướng dẫn:

+ Gọi số cần tìm có dạng $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4a_5}}$; $\mathbf{a_i = \overline{0;9}}$; $\mathbf{a_1 = a_5; a_2 = a_4}$

+ $\mathbf{a_1}$ có 9 cách chọn (do không chọn chữ số 0)

+ $\mathbf{a_2}$ có 10 cách chọn

+ $\mathbf{a_3}$ có 10 cách chọn

+ $\mathbf{a_4 = a_2}$ nên có 1 cách chọn

+ $\mathbf{a_5 = a_1}$ nên có 1 cách chọn

Vậy tất cả có: 9.10.10.1.1 = 900 số thỏa mãn yêu cầu.

Bài 10: Có bao nhiêu số tự nhiên có tính chất:

a) Là số chẵn và có 2 chữ số

b) Là số chẵn có 2 chữ số khác nhau

c) Là số lẻ có 2 chữ số

d) Là số lẻ có 2 chữ số khác nhau

Hướng dẫn:

a) Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2};a_i=\overline{0;9}$ + a_1 có 9 cách chọn (Do không chọn chữ số 0) + $a_2\in\{0;2;4;6;8\}$ là số chẵn nên có 5 cách chọn. Vậy tất cả có 9.5 = 45 số chẵn có 2 chữ số	c) Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2};a_i=\overline{0;9}$ + a_1 có 9 cách chọn (Do không chọn chữ số 0) + $a_2\in\{1;3;5;7;9\}$ là số chẵn nên có 5 cách chọn. Vậy tất cả có 9.5 = 45 số lẻ có 2 chữ số
b) Ta tìm các số chẵn có 2 chữ số giống nhau $\overline{a_1a_2};a_i\in\{2;4;6;8\}$ + a_1 có 4 cách chọn + $a_2=a_1$ có 1 cách chọn Vậy có 4.1 = 4 chữ số chẵn có 2 chữ số giống nhau. + Kết hợp phần a $\Rightarrow$ có 45 - 4 = 41 số chẵn có 2 chữ số khác nhau	d) Ta tìm các số lẻ có 2 chữ số giống nhau $\overline{a_1a_2};a_i\in\{1;3;5;7;9\}$ + a_1 có 5 cách chọn + $a_2=a_1$ có 1 cách chọn Vậy có 5.1 = 5 chữ số lẻ có 2 chữ số giống nhau. + Kết hợp phần c $\Rightarrow$ có 45 - 5 = 40 số lẻ có 2 chữ số khác nhau

Bài 11: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 100 ?

Hướng dẫn: Số tự nhiên cần tìm tối đa có 2 chữ số

* Bước 1: Tìm các số tự nhiên có 1 chữ số: Có 6 số

* Bước 2: Tìm các số tự nhiên có 2 chữ số

Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2};a_i=\overline{1;6}$

+ a_1 có 6 cách chọn

+ a_2 có 6 cách chọn

Vậy có 6.6 = 36 số tự nhiên có 2 chữ số

Kết luận: Có 6 + 36 = 42 số tự nhiên lập được từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 và nhỏ hơn 100

Bài 12: Có bao nhiêu số nguyên dương gồm không quá 3 chữ số khác nhau ?

Hướng dẫn:

* Bước 1: Tìm các số nguyên dương có 1 chữ số: Có 9 số

* Bước 2: Tìm các số nguyên dương có 2 chữ số khác nhau

Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2};a_i=\overline{0;9}$

+ $\mathbf{a_1}$ có 9 cách chọn (do không chọn chữ số 0)

+ $\mathbf{a_2}$ có 10 - 1 = 9 cách chọn

Vậy có 9.9 = 81 số nguyên dương có 2 chữ số khác nhau

* Bước 3: Tìm các số nguyên dương có 3 chữ số khác nhau

Số cần tìm có dạng $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3}};\mathbf{a_i}=\overline{\mathbf{0;9}}$

+ $\mathbf{a_1}$ có 9 cách chọn (do không chọn chữ số 0)

+ $\mathbf{a_2}$ có 10 - 1 = 9 cách chọn

+ $\mathbf{a_3}$ có 8 cách chọn

Vậy có 9.9.8 = 648 số nguyên dương có 3 chữ số khác nhau

Kết luận: Vậy có 9 + 81 + 648 = 738 số nguyên dương gồm không quá 3 chữ số khác nhau

Bài 13: Một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm chọn 3 học sinh để đi trực thư viên. Có bao nhiêu cách chọn nếu :

a) Chọn 3 học sinh, trong đó có đúng 1 học sinh nữ được chọn.

b) Trong 3 học sinh được chọn ít nhất có 1 học sinh nữ được chọn.

Hướng dẫn:

a)

+ Để chọn 1 học sinh nữ trong 4 học sinh nữ có: 4 cách

+ Để chọn 1 học sinh tiếp theo có: 6 cách (chỉ được chọn trong số học sinh nam)

+ Để chọn 1 học sinh cuối cùng có: 5 cách

Vậy có 4.6.5 = 120 cách chọn 3 học sinh trong đó có đúng 1 học sinh nữ

b)

* Trường hợp 1: Trong 3 học sinh được chọn, có đúng 1 học sinh nữ : Có 120 cách (theo a)

* Trường hợp 2: Trong 3 học sinh được chọn có đúng 2 học sinh nữ:

+ Chọn nữ thứ nhất: có 4 cách

+ Chọn nữ thứ hai: có 3 cách

+ Chọn 1 nam: có 6 cách

Vậy có: 4.3.6 = 72 cách

* Trường hợp 3: Cả 3 học sinh chọn đều là nữ: có 4.3.2 = 24 cách chọn

Kết luận: Tất cả có 120 + 72 + 24 = 216 cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 14: Một đoàn tàu có 4 toa đỗ ở sân ga. Có 4 hành khách bước lên tàu. Hỏi :

a) Có bao nhiêu trường hợp về cách chọn toa của 4 hành khách ?

b) Có bao nhiêu trường hợp mà mỗi toa có 1 người lên ?

c) Có bao nhiêu trường hợp mà mỗi toa có 3 người lên, một toa có 1 người lên và hai toa còn lại không có ai lên ?

Hướng dẫn:

a) + Người thứ nhất: có 4 cách chọn + Người thứ hai: có 4 cách chọn + Người thứ ba: có 4 cách chọn + Người thứ tư: có 4 cách chọn Vậy tất cả có 4.4.4.4 = 256 cách chọn	b) + Người thứ nhất: có 4 cách chọn + Người thứ hai: có 3 cách chọn + Người thứ ba: có 2 cách chọn + Người thứ tư: có 1 cách chọn Vậy tất cả có 4.3.2.1 = 14 cách chọn

c)

+ Chia 4 người thành 2 nhóm: Nhóm I: có 3 người, nhóm II: có 1 người (Ta chia bằng cách chọn ra 1 người và 3 người còn lại cho vào 1 nhóm). Vậy có 4 cách chia nhóm. + Với mỗi cách chia nhóm xếp 2 nhóm vào 4 khoang: - Nhóm I: Có 4 cách xếp - Nhóm II: Có 3 cách xếp + Như vậy có 4.3 = 12 cách xếp cho mỗi cách chia nhóm, mà có 4 cách chia nhóm. Kết luận: Vậy tất cả có 12.4 = 48 cách	c) **Cách khác:** + Hành khách 1 lên toa 1 có 4 cách chọn + Sau đó 3 hành khách còn lại lên chung 1 toa có 3 cách chọn Vậy ta có 4.3 = 12 cách. + Vì vai trò các hành khách như nhau nên trong trường hợp này có tất cả 12.4 = 48 cách.

Bài 15: Biển đăng ký xe ô tô có 6 chữ số và 2 chữ cái đầu tiên trong 26 chữ cái (Không dùng chữ I và O). Hỏi số ô tô đăng ký nhiều nhất là bao nhiêu ?

Hướng dẫn:

+ 2 chữ cái đầu tiên trong 24 chữ cái nên có : 24.24 = 576 cách chọn

+ Chữ số đầu tiên khác 0 nên có 9 cách chọn

+ 5 chữ số còn lại không nhất thiết phải khác 0 và có thể lặp lại nên có : 10.10.10.10.10 = 100.000 cách chọn

Vậy tất cả có: 576.9.100000 = 518.400.000 số ô tô được đăng ký.

Bài 16: Cho 7 chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Có bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau được viêt từ các chữ số đã cho ?

Hướng dẫn:

Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4}}$ + $\mathbf{a_1}$ có 7 cách chọn + $\mathbf{a_2}$ có 6 cách chọn + $\mathbf{a_3}$ có 5 cách chọn + $\mathbf{a_4}$ có 4 cách chọn	Vậy có 7.6.5.4 = 840 số thỏa mãn

Bài 17: Cho các số 1; 2; 5; 7; 8. Có bao nhiêu cách lập ra một số gồm 3 chữ số khác nhau từ 5 chữ số trên sao cho số tạo thành là một số chẵn ?

Hướng dẫn:

Gọi số cần tìm là $\mathbf{n = \overline{a_1a_2a_3}}$ Để n chẵn thì $\mathbf{a_3 \in \{2;8\}}$ + $\mathbf{a_3}$ có 2 cách chọn + $\mathbf{a_1}$ có 4 cách chọn + $\mathbf{a_2}$ có 3 cách chọn	Vậy có 2.4.3 = 24 số thỏa mãn

Bài 18: Với các chữ số từ 0 đến 5, ta có thể lập được bao nhiêu số chẵn mà mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau ?

Hướng dẫn: Gọi số cần tìm là : $\mathbf{n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}}$

TH1: $\mathbf{a_5 = 0}$ có 1 cách + $\mathbf{a_1}$ có 5 cách chọn + $\mathbf{a_2}$ có 4 cách chọn + $\mathbf{a_3}$ có 3 cách chọn + $\mathbf{a_4}$ có 2 cách chọn Vậy có 1.5.4.3.2 = 120 số thỏa mãn	TH2: $\mathbf{a_5 \neq 0}$ có 2 cách (Do $\mathbf{a_5 \in \{2;4\}}$) + $\mathbf{a_1}$ có 4 cách chọn (Do $\mathbf{a_1 \neq 0}$) + $\mathbf{a_2}$ có 4 cách chọn + $\mathbf{a_3}$ có 3 cách chọn + $\mathbf{a_4}$ có 2 cách chọn Vậy có 2.4.4.3.2 = 192 số thỏa mãn

Kết luận: Có tất cả 120 + 192 = 312 số thỏa mãn yêu cầu bài toán

Cách khác:

+ Gọi số tự nhiên CÓ 5 CHỮ SỐ KHÁC NHAU là: $\mathbf{n=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}}$

+ $\mathbf{a_1}$ có 5 cách chọn (Do $\mathbf{a_1 \neq 0}$) + $\mathbf{a_2}$ có 5 cách chọn + $\mathbf{a_3}$ có 4 cách chọn + $\mathbf{a_4}$ có 3 cách chọn + $\mathbf{a_5}$ có 2 cách chọn	Vậy có 5.5.4.3.2 = 600 số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau

+ Gọi số tự nhiên LẺ CÓ 5 CHỮ SỐ KHÁC NHAU là: $\mathbf{m=\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}}$

+ $\mathbf{b_5}$ có 3 cách chọn (Do $\mathbf{b_5 \in \{1;3;5\}}$) + $\mathbf{b_1}$ có 4 cách chọn (Do $\mathbf{b_1 \neq 0}$) + $\mathbf{b_2}$ có 4 cách chọn + $\mathbf{b_3}$ có 3 cách chọn + $\mathbf{b_4}$ có 2 cách chọn	Vậy có 3.4.4.3.2 = 288 số tự nhiên lẻ có 5 chữ số khác nhau

Kết luận: Vậy các số chẵn thỏa mãn yêu cầu bài toán là : 600 - 288 = 312 số.

Bài 19: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau ?

Hướng dẫn: Gọi số cần tìm là : $\mathbf{n=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}}$

TH1: $\mathbf{a_5 = 0}$ có 1 cách + $\mathbf{a_1}$ có 6 cách chọn + $\mathbf{a_2}$ có 5 cách chọn + $\mathbf{a_3}$ có 4 cách chọn + $\mathbf{a_4}$ có 3 cách chọn Vậy có 1.6.5.4.3 = 360 số thỏa mãn	TH2: $\mathbf{a_5 \neq 0}$ có 3 cách (Do $\mathbf{a_5 \in \{2;4;6\}}$) + $\mathbf{a_1}$ có 5 cách chọn (Do $\mathbf{a_1 \neq 0}$) + $\mathbf{a_2}$ có 5 cách chọn + $\mathbf{a_3}$ có 4 cách chọn + $\mathbf{a_4}$ có 3 cách chọn Vậy có 3.5.5.4.3 = 900 số thỏa mãn

Kết luận: Có tất cả 300 + 900 = 1260 số thỏa mãn yêu cầu bài toán

Cách khác:

+ Gọi số tự nhiên CHẴN CÓ 5 CHỮ SỐ KHÁC NHAU là: $\mathbf{n}=\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4a_5}}$

TH1: $\mathbf{a_5}=\mathbf{0}$ có 1 cách + $\mathbf{a_1}$ có 6 cách chọn + $\mathbf{a_2}$ có 5 cách chọn + $\mathbf{a_3}$ có 4 cách chọn + $\mathbf{a_4}$ có 3 cách chọn Vậy có 1.6.5.4.3 = 360 số thỏa mãn	TH2: $\mathbf{a_5}=\mathbf{2}$ có 1 cách + $\mathbf{a_1}$ có 5 cách chọn (Do $\mathbf{a_1}\neq\mathbf{0}$) + $\mathbf{a_2}$ có 5 cách chọn + $\mathbf{a_3}$ có 4 cách chọn + $\mathbf{a_4}$ có 3 cách chọn Vậy có 1.5.5.4.3 = 300 số thỏa mãn

Tương tự TH3: $\mathbf{a_5}=\mathbf{4}$; TH4: $\mathbf{a_5}=\mathbf{6}$ mỗi trường hợp cũng có 300 số.

Kết luận: Vậy tất cả có 360 + 300.3 = 1260 số thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 20: Có 100.000 vé số được đánh số từ 00000 đến 99999. Hỏi có bao nhiêu vé số gồm 5 chữ số khác nhau ?

Hướng dẫn: Gọi $\mathbf{n}=\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4a_5}}$ là số in trên vé số thỏa mãn yêu cầu bài toán

+ $\mathbf{a_1}$ có 10 cách chọn
+ $\mathbf{a_2}$ có 9 cách chọn
+ $\mathbf{a_3}$ có 8 cách chọn
+ $\mathbf{a_4}$ có 7 cách chọn
+ $\mathbf{a_5}$ có 6 cách chọn

Vậy có 10.9.8.7.6 = 30.240 vé số thỏa mãn

Bài 21: Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số thỏa mãn chữ số thứ 3 là chẵn, chữ số cuối cùng chia hết cho 3, các chữ số thứ 5 và 6 khác nhau ?

Hướng dẫn: Gọi $\mathbf{n}=\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}}$ là số cần tìm.

+ $\mathbf{a_3}$ có 5 cách chọn (Do $\mathbf{a_3}\in\{0;2;4;6;8\}$)

+ $\mathbf{a_7}$ có 3 cách chọn (Do $\mathbf{a_7}\in\{3;6;9\}$)

+ $\mathbf{a_1}$ có 9 cách chọn (Do $\mathbf{a_1}\neq\mathbf{0}$)

+ $\mathbf{a_2}$ có 10 cách chọn

+ $\mathbf{a_4}$ có 10 cách chọn

+ $\mathbf{a_5}$ có 10 cách chọn

+ $\mathbf{a_6}$ có 9 cách (Do $\mathbf{a_6 \neq a_5}$)

Vậy có 5.3.9.10.10.10.9 = 1.215.000 số thỏa mãn

Bài 22: Cho tập hợp $\mathbf{A = \{0;1;2;3;4;5\}}$. Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số trong tập hợp A ?

Hướng dẫn: Gọi $\mathbf{n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}}$ là số cần tìm.

+ $\mathbf{a_1}$ có 5 cách chọn (Do $\mathbf{a_1 \neq 0}$) + $\mathbf{a_2}$ có 5 cách chọn + $\mathbf{a_3}$ có 4 cách chọn + $\mathbf{a_4}$ có 3 cách chọn + $\mathbf{a_5}$ có 2 cách chọn	Vậy có 5.5.4.3.2 = 600 số thỏa mãn

Bài 23: Từ các chữ số 0; 1; 3; 5; 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5 ?

Hướng dẫn: Gọi $\mathbf{n = \overline{a_1a_2a_3a_4}}$ là số cần tìm.

+ $\mathbf{a_4}$ có 3 cách chọn (Do $\mathbf{a_4 \in \{1;3;7\}}$) + $\mathbf{a_1}$ có 3 cách chọn + $\mathbf{a_2}$ có 3 cách chọn + $\mathbf{a_3}$ có 2 cách chọn	Vậy có 3.3.3.2 = 54 số thỏa mãn

Bài 24: Có bao nhiêu số tự nhiên trong đó các chữ số khác nhau, nhỏ hơn 10.000 được tạo thành từ 5 chữ số 0; 1; 2; 3; 4 ?

Hướng dẫn: Số cần tìm < 10.000 vậy lớn nhất chỉ có thể là số có 4 chữ số

TH1: Số đó có 4 chữ số khác nhau :

Gọi $\mathbf{n = \overline{a_1a_2a_3a_4}}$ là số cần tìm.

+ $\mathbf{a_1}$ có 4 cách chọn (Do $\mathbf{a_1 \neq 0}$)

+ $\mathbf{a_2}$ có 4 cách chọn

+ $\mathbf{a_3}$ có 3 cách chọn

+ $\mathbf{a_4}$ có 2 cách chọn

Vậy có 4.4.3.2 = 96 số thỏa mãn

TH2: Số đó có 3 chữ số khác nhau:

Gọi $\mathbf{n = \overline{a_1a_2a_3}}$ là số cần tìm.

+ $\mathbf{a_1}$ có 4 cách chọn (Do $\mathbf{a_1 \neq 0}$)

+ $\mathbf{a_2}$ có 4 cách chọn

+ $\mathbf{a_3}$ có 3 cách chọn

Vậy có 4.4.3 = 48 số thỏa mãn

TH3: Số đó có 2 chữ số khác nhau:

Gọi $\mathbf{n = \overline{a_1a_2}}$ là số cần tìm.

+ $\mathbf{a_1}$ có 4 cách chọn (Do $\mathbf{a_1 \neq 0}$)

+ $\mathbf{a_2}$ có 4 cách chọn

Vậy có 4.4 = 16 số thỏa mãn

TH4: Số đó có 1 chữ số: có 4 số

Kết luận: Tất cả có 96 + 46 + 16 + 4 = 156 số thỏa mãn

Bài 25: Có 4 nam và 4 nữ cần xếp ngồi dài vào một hàng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ nhau ?

Hướng dẫn: Liên hệ tới bài toán tương tự như sau để có lời giải: Có 8 chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 (Nam coi như các chữ số: 1; 3; 5; 7, nữ coi như các chữ số 2; 4; 6; 8). Cần tạo ra các số sao cho các chữ số chẵn và lẻ xen kẽ nhau. Các chữ số khác nhau.

Gọi $\mathbf{n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}}$ là số cần tìm.

+ $\mathbf{a_1}$ có 8 cách chọn (Do $\mathbf{a_1 \in \{1;2;3;...;8\}}$)

+ $\mathbf{a_2}$ có 4 cách chọn (Do $\mathbf{a_2 \in \{1;3;5;7\}}$ hoặc $\mathbf{a_2 \in \{2;4;6;8\}}$)

+ $\mathbf{a_3}$ có 3 cách chọn (Do $\mathbf{a_2}$ đã chọn 1 nam hoặc 1 nữ, vậy chỉ còn 3 cách)

+ $\mathbf{a_4}$ có 3 cách chọn (Do $\mathbf{a_2}$ đã chọn 1 nam hoặc 1 nữ, vậy chỉ còn 3 cách)

+ $\mathbf{a_5}$ có 2 cách

+ $\mathbf{a_6}$ có 2 cách

+ $\mathbf{a_7}$ có 1 cách

+ $\mathbf{a_8}$ có 1 cách

Vậy có 8.4.3.3.2.2.1.1 = 1152 số thỏa mãn

Áp dụng vào bài toán trên có

+ Vị trí 1 có 8 cách chọn

+ Vị trí 2 có 4 cách chọn

+ Vị trí 3 có 3 cách chọn

+ Vị trí 4 có 3 cách chọn

+ Vị trí 5 có 2 cách

+ Vị trí 6 có 2 cách

+ Vị trí 7 có 1 cách

+ Vị trí 8 có 1 cách

Vậy có 8.4.3.3.2.2.1.1 = 1152 cách xếp thỏa mãn

Bài 25. Có bao nhiêu ước nguyên dương của số $2^3.3^4.5^6.7^8 11^{12}.13^{14}$

Hướng dẫn:

Ước nguyên dương của số $2^3.3^4.5^6.7^8 11^{12}.13^{14}$ khi đã phân tích ra thừa số nguyên tố thì có dạng: $2^a.3^b.5^c.7^d 11^e.13^f$

Với số a có thể chọn 0, 1, 2, 3 thì có 4 cách chọn. (a là số tự nhiên không vượt quá 3)
Với số b có thể chọn 0, 1, 2, 3, 4 thì có 5 cách chọn. (b là số tự nhiên không vượt quá 4)
Với số c có thể chọn 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 thì có 7 cách chọn. (c là số tự nhiên không vượt quá 6)
Với số d có thể chọn 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 thì có 9 cách chọn. (d là số tự nhiên không vượt quá 8)
Với số e có thể chọn 0, 1, 2, 3, 4, … 10, 11, 12 thì có 13 cách chọn. (…)
Với số f có thể chọn 0, 1, 2, 3, 4,…12, 13, 14 thì có 15 cách chọn.
Vậy có 4.5.7.9.13.15 = 245700 ước số.

Cách của THCS: số $2^a.3^b.5^c.7^d 11^e.13^f$ có $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)(f+1)$ ước số

Bài 26: Số 12000 có bao nhiêu ước số tự nhiên ?

Hướng dẫn:

Ta có $12000 = 2^5.3.5^3$

Suy ra ước của số 12000 có dạng $2^a.3^b.5^c$

$a \in \{0;1;2;3;4;5\}$ Do $0 \le a \le 5; b \in \{0;1\}$ Do $0 \le b \le 1; c \in \{0;1;2;3\}$ Do $0 \le c \le 3$;

+ Chọn a có 6 cách
+ Chọn b có 2 cách
+ Chọn c có 4 cách
Vậy có 6.2.4 = 48 ước số.

Bài 27: Có bao nhiêu ước nguyên dương của số 31752000 ?

Hướng dẫn:

Ta có $31752000 = 2^6.3^4.5^3.7^2$

Tương tự có: $(6+1)(4+1)(3+1)(2+1) = 420$ ước số

Bài 28: Giả sử một bạn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc 40. áo cỡ 39 có 5 màu áo khác nhau. áo cỡ 40 có 4 màu áo khác nhau. Hỏi bạn có bao nhiêu sự lựa chọn ?

Hướng dẫn:

Công việc "mua áo" có thể thực hiện theo hai phương án A "áo cỡ 39" hoặc phương án B"áo cỡ 40".
phương án A có 5 cách chọn .(có 5 màu áo khác nhau)

phương án B có 4 cách chọn. .(có 4 màu áo khác nhau)
vậy : công việc "mua áo" có thể thực hiện bởi : 5. + 4 = 9 cách chọn.

Bài 29: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số đều chẵn ?

Hướng dẫn:
Gọi số tự nhiên có hai chữ số : $\overline{ab}$
Tập hợp chữ số tự nhiên chẵn : A = {0, 2, 4, 6, 8} có 5 phần tử.
+ chữ số a có 4 cách chọn. ($a \neq 0$; $a \in A$)
+ chữ số b có 5 cách chọn. ($b \in A$)
Vậy : số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số đều chẵn có : 4.5 = 20 số.

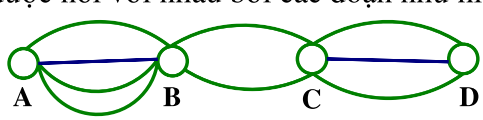
Bài 30: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm:
a) Một chữ số
b) Hai chữ số
c) Hai chữ số khác nhau
d) Không quá 3 chữ số ?

Hướng dẫn:
a) 4 số
b) 4.4 = 16 số
c) 4.3 = 12 số
d) 4 + (4.4) + (4.4.4) = 84 số

Bài 31: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên :
a) Bé hơn 100
b) Bé hơn 1000

Hướng dẫn:
a) có 6.6 = 36 số
b) có 6.6.6 = 216 số

Bài 32: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các đoạn như hình sau :

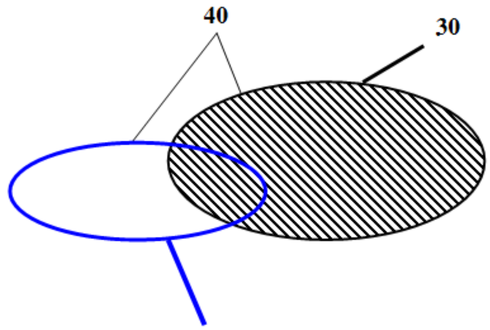


a) Có bao nhiêu cách đi từ A đến D, qua B và C chỉ một lần
b) Có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A

Hướng dẫn:
a) Từ A đến B có 4 cách đi
Từ A đến C có 4.2 cách đi
Từ A đến D có 4.2.3 = 24 cách đi
b) Từ A đến D rồi quay về A có 24.24 = 576 cách đi

Bài 33: Một lớp có 40 học sinh đăng ký chơi ít nhất một trong 2 môn thể thao: bóng đá và bóng chuyền. Có 30 em đăng ký môn bóng đá, 25 em đăng ký môn bóng chuyền. Có 30 em đăng ký môn bóng đá, 25 em đăng ký môn bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký chơi cả 2 môn thể thao ?

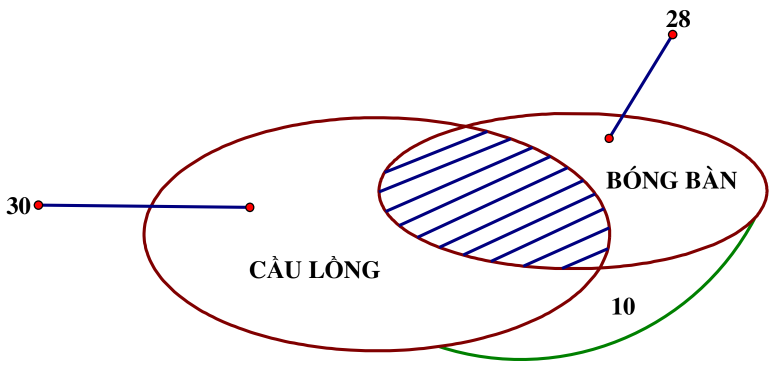
Hướng dẫn:



+ Số học sinh đăng ký chỉ chơi bóng chuyền: 40 - 30 = 10
+ Số học sinh đăng ký chỉ chơi bóng đá: 40 - 25 = 15
+ Tổng số học sinh chỉ đăng ký 1 môn là : 10 + 15 = 25
+ Vậy số học sinh đăng ký chơi cả 2 môn là: 40 - (10 + 15) = 15 em

Bài 34: Một lớp có 50 học sinh dự trại hè, được chơi 2 môn thể thao cầu lông và bóng bàn .Có 30 bạn đăng kí chơi cầu lông, 28 bạn đăng kí bóng bàn, 10 bạn không chơi môn nào. Hỏi có bao nhiêu bạn :
a) chơi cả hai môn
b) chỉ đăng kí một môn

Hướng dẫn:
a)



+ Số học sinh chỉ chơi cầu lông: 50 - 10 - 28 = 12 học sinh

+ Số học sinh chỉ chơi bóng bàn: 50 - 10 - 30 = 10 học sinh

+ Số học sinh chơi cả 2 môn: 50 - (12 + 10 + 10) = 18 học sinh

b) Số học sinh đăng ký chỉ chơi 1 môn: 12 + 10 = 22 học sinh

BÀI TẬP TỰ LUYỆN KÈM HƯỚNG DẪN & ĐÁP SỐ

Bài 1: Từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng ô tô, tàu hỏa, tàu thủy và máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa, 3 chuyến tàu thủy và 2 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách để đi từ tỉnh A đến tỉnh B?

HD: Theo quy tắc cộng, ta có: 10 + 5 + 3 + 2 = 20 sự lựa chọn khác nhau để đi từ tỉnh A đến tỉnh B.

Bài 2: Một bình đựng 12 quả cầu trong đó có 5 quả xanh, 4 quả trắng và 3 quả vàng. Chọn 3 quả cầu. Hỏi có mấy cách chọn để được 3 quả cầu khác mầu?

HD:
+ Từ 5 quả cầu xanh chọn 1, có 5 cách.
+ Từ 4 quả cầu xanh chọn 1, có 4 cách.

+ Từ 3 quả cầu xanh chọn 1, có 3 cách.
Theo quy tắc nhân, số cách chọn được 3 quả cầu khác màu là: 5.4.3 = 60

Bài 3: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn?

HD: Số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số đều chẵn có dạng $\overline{ab}$

Với $a,b \in \{0,2,4,6,8\}$ và $a \neq 0$.

Chọn a có 4 cách và chọn b có 5 cách.
Vậy có 4.5 = 20 số thỏa mãn đề bài.

Bài 4 (SGKNC): Biển số xe máy của tỉnh A (nếu không kể mã số tỉnh) có 6 ký tự:
- Ký tự đầu tiên là 1 chữ cái (trong bảng 26 chữ cái của tiếng Anh)
- Ký tự thứ hai là 1 chữ số thuộc tập hợp $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$
- Mỗi ký tự ở 4 vị trí tiếp theo là 1 chữ số thuộc tập hợp $\{0;1;2;3;...;9\}$

Hỏi nếu chỉ dùng 1 mã số tỉnh thì tỉnh A có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu biển số xe khác nhau ?

Hướng dẫn:
- Ký tự đầu tiên có 26 cách chọn
- Ký tự thứ hai có 9 cách chọn
- Ký tự ở 4 vị trí tiếp theo, mỗi vị trí có 10 cách chọn.

Vậy có thể lập được: 26.9.10.10.10.10 = 2.340.000 biển số xe khác nhau

Bài 5: Mỗi người sử dụng mạng máy tính đều có mật khẩu. Giả sử mỗi mật khẩu gồm 6 ký tự, mỗi ký tự hoặc là 1 chữ số (từ 0 đến 9) hoặc là 1 chữ cái (trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh) và mật khẩu phải có ít nhất 1 chữ số:
a) Có bao nhiêu dãy số gồm 6 ký tự, mỗi ký tự hoặc là 1 chữ cái (26) hoặc là 1 chữ số (10) ?
b) Có bao nhiêu dãy số gồm 6 ký tự nói ở câu a không phải là mật khẩu ?
c) Có thể lập được nhiều nhất bao nhiêu mật khẩu ?

Hướng dẫn:
a) Cách chọn ký tự đầu tiên: Có 36 cách (do có 26 cách chọn chữ cái + 10 cách chọn chữ số).
- Do dãy có 6 ký tự, cách chọn 5 ký tự còn lại tương tự cách chọn ký tự đầu tiên.

Vậy có: 36.36.36.36.36.36 $= \mathbf{36^6}$ dãy số được lập
b) Vì mật khẩu phải có ít nhất 1 chữ số nên dãy gồm 6 ký tự không phải là mật khẩu nếu tất cả 6 ký đều là chữ cái. Vậy tất cả có: $\mathbf{26^6}$ dãy số gồm 6 ký tự không phải là mật khẩu.
(Chú ý: Dãy gồm 6 ký tự mà tất cả các ký tự đều là chữ số vẫn là mật khẩu - vì mật khẩu có ít nhất 1 chữ số)
c) Có thể lập được nhiều nhất : $\mathbf{36^6 - 26^6 = 1.867.866.560}$ mật khẩu.

Bài 6: Có bao nhiêu số điện thoại gồm:
a) 6 chữ số bất kỳ **b)** 6 chữ số lẻ

Hướng dẫn:
a) Vì số điện thoại được lập từ 10 chữ số (0 đến 9), mà số điện thoại có 6 chữ số bất kỳ nên có:
$\mathbf{10^6 = 1.000.000}$ số điện thoại
b) Vì số điện thoại được lập từ 5 chữ số lẻ (1; 3; 5; 7; 9). Vậy có: $\mathbf{5^6 = 15.625}$ số điện thoại

BÀI HỌC 2: HOÁN VỊ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giai thừa:

+ n giai thừa được ký hiệu n!

+ Cách tính: n! = n(n - 1)(n - 2).(n - 3) … 1

+ Quy ước 0! = 1! = 1

2. Định nghĩa:

*** Bài toán:** Cho tập hợp A gồm n phần tử. Có bao nhiêu cách sắp xếp thứ tự n phần tử của A?
Ta có: Việc sắp xếp thứ tự n phần tử của A là một công việc gồm n - công đoạn:
+ Công đoạn 1: Chọn phần tử để sắp xếp vào vị trí thứ nhất : có n - cách
+ Công đoạn 2: Chọn phần tử để sắp xếp vào vị trí thứ hai : có n - 1 cách
+ Công đoạn 3: Chọn phần tử để sắp xếp vào vị trí thứ ba : có n - 2 cách
….
+ Công đoạn n: Chọn phần tử để sắp xếp vào vị trí thứ n : có 1 cách
Vậy ta có tất cả n(n - 1)(n - 2)(n - 3) … 1 = n! (cách)

*** Định nghĩa:**
Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Khi sắp xếp n phần tử THEO MỘT THỨ TỰ gọi là hoán vị các phần tử của tập hợp A.
*** Số các hoán vị:** $P_n = n!$

VD1: Có 3 vận động viên An, Bình, Châu chạy thi. Nếu không kể trường hợp có 2 vận động viên cùng về đích một lúc thì có bao nhiêu khả năng xảy ra ?
+ Do các vận động viên về đích được tính theo một thứ tự nên có $P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$ khả năng

VD2: Trong một trận đá bóng, sau 2 hiệp phụ hai đội vẫn hòa nên phải thực hiện đá luân lưu 11m. Một đội đã chọn được 5 cầu thủ để thực hiện 5 quả đá 11m. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp đá phạt.
+ Do cách sắp xếp có tính theo thứ tự cầu thủ nên có $P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$ cách sắp xếp

VD3: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau ?
+ Có $P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$ số
(Chú ý: Nếu từ các số 0; 1; 2; 3; 4 thì đáp số sẽ khác)

VD4: Một đoàn khách du lịch dự định đến tham quan 7 địa điểm A, B, C, D, E, F, G ở thủ đô Hà Nội. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?
+ Vì các địa điểm tham quan có tính theo thứ tự nên có $P_7 = 7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$ cách chọn

VD5: Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ cho 3 người ngồi trong 1 bàn dài ?
+ Có $P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$ cách sắp xếp.

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Một giải bóng đá gồm 6 đội. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra về thứ tự giữa các đội ?

Hướng dẫn: Có $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$ khả năng.

Bài 2: Xét xem các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau lập nên từ các số 1; 2; 3; 4; 5. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số:
a) Bắt đầu bởi chữ số 5
b) Không bắt đầu bằng chữ số 1
c) Bắt đầu bởi chữ số 2 và 3
d) Không bắt đầu bằng 345

Hướng dẫn:
a) Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}; a_1 = 5$. Vì 4 chữ số 1; 2; 3; 4 vào các vị trí $a_2; a_3; a_4; a_5$ nên là hoán vị

$\mathbf{P_4 = 4! = 24}$ số tự nhiên khác nhau và bắt đầu bằng chữ số 5.

b) Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4a_5}}$. Vì $\mathbf{a_1 \in \{2;3;4;5\}}$ nên có 4 cách chọn. Các số còn lại là hoán vị $\mathbf{P_4}$

Vậy có tất cả $\mathbf{4.P_4 = 96}$ số thỏa mãn

c) Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{23a_3a_4a_5}}$. Vậy có $\mathbf{1.1.P_3 = 6}$ số

d) Ta làm ngược lại: Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số bắt đầu bằng 345 là $\overline{\mathbf{345a_4a_5}}$. Vậy có $\mathbf{1.1.1.P_2 = 2}$ số

Kết luận: Số các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu đề bài là $\mathbf{5! - 1.1.1.P_2 = 118}$ số

Bài 3: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 ta có thể lập được tất cả các số gồm 9 chữ số khác nhau :
a) Có bao nhiêu số được thành lập
b) Có bao nhiêu số chia hết cho 5
c) Có bao nhiêu số chẵn

Hướng dẫn:
a) Đáp số: 9! = 362.880 số
b) Ta thấy chữ số cuối cùng là 5 (để số cần tìm chia hết cho 5) nên có 1 cách chọn. 8 vị trí còn lại là hoán vị vì vậy có 8! Cách chọn.
Kết luận: có 8!.1 = 40.320 số có 9 chữ số khác nhau chia hết cho 5
c) Ta thấy chữ số cuối cùng là 2; 4; 6; 8 (để số cần tìm là số chẵn) nên có 4 cách chọn. 8 vị trí còn lại là hoán vị vì vậy có 8! Cách chọn.
Kết luận: có 8!.4 = 161.280 số có 9 chữ số khác nhau và là số chẵn.

Bài 4: Có 10 học sinh cùng ngồi trên một hàng ghế và chơi trò đổi chỗ. Cho rằng mỗi lần đổi chỗ hết 1 phút. Hỏi thời gian họ đổi chỗ cho nhau là bao nhiêu ?

Hướng dẫn:
+ Số lần đổi chỗ là 10! = 3.628.800 lần
+ Thời gian họ đổi chỗ trong các tình huống là: 3.628.800 (khoảng 7 năm)

Bài 5: Một nhóm gồm 12 học sinh trong đó 5 nữ và 7 nam. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 12 học sinh thành một hàng doc sao cho 5 học sinh nữ phải đứng liền nhau ?

Hướng dẫn: Dùng cách "buộc củi"
+ Coi 5 học sinh nữ đứng liền nhau như 1 nhóm X. Như vậy ta có 7 bạn nam và 1 nhóm X (coi như 8 bạn) xếp thành một hàng dọc.
+ Xếp X và 7 học sinh nam có 8! Cách
+ Bây giờ mở nhóm X ra cho 5 bạn nữ hoán vị với nhau. Vậy xếp 5 bạn nữ trong nhóm X có 5! Cách.
Vậy theo quy tắc nhân ta có: 8! . 5! = 4.838.400 cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 6: Có 4 tem thư khác nhau và 4 bì thư khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách dán tem vào bì ?

Hướng dẫn:
(Cố định 4 bì thư (coi như 4 ghế ngồi), mỗi tem thư coi như 1 người di chuyển vào chỗ ngồi)
+ Cố định 4 bì thư. Mỗi hoán vị của 4 tem thư là 1 cách dán. Vậy có 4! = 24 cách dán tem vào bì
(Chú ý: không được vừa hoán vị tem vừa hoán vị bì thư, vì như vậy chắc chắn sẽ có lúc trùng nhau)

Bài 7: Cần sắp xếp 5 học sinh A, B, C, D, E thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho 2 học sinh A, và B luôn đứng ở đầu hàng ?

Hướng dẫn:
+ Coi 2 bạn A và B đứng cạnh nhau (đầu hàng) như một nhóm X. Như vậy ta có 3 bạn C, D, E và một nhóm X (coi như 4 bạn)
+ X luôn đứng vị trí đầu nên có 1 cách xếp
+ 3 bạn còn lại có 3! Cách xếp.
+ 2 bạn trong nhóm X lại có 2! Cách xếp
Vậy ta có : 1.3!.2! = 12 cách sắp xếp

Bài 8: Từ 5 chữ số 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó có bao nhiêu số lẻ, bao nhiêu số không chia hết cho 5?

Hướng dẫn:

+ Ta có $\mathbf{P_5 = 5! = 120}$ số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau

+ Gọi $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4a_5}}$ là số tự nhiên lẻ có 5 chữ sô khác nhau được lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5

Khi đó $\mathbf{a_5 \in \{1;3;5\}}$ nên có 3 cách chọn, 4 số còn lại có 4! Cách chọn.

Vậy có 3.4! = 72 số tự nhiên lẻ có 5 chữ sô khác nhau được lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5

+ Gọi $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4a_5}}$ là số tự nhiên chia hết cho 5 có 5 chữ sô khác nhau được lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5

Khi đó $\mathbf{a_5 = 5}$ nên có 1 cách chọn, 4 số còn lại có 4! Cách chọn.

Vậy có 1.4! = 24 số tự nhiên chia hết cho 5 có 5 chữ sô khác nhau được lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5

Bài 9: Cần sắp xếp 3 học sinh nữ và 5 học sinh nam thành một hàng dọc:
a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu 3 học sinh nữ luôn đứng liền nhau ?
b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nêu học sinh đứng đầu là học sinh nữ và học sinh đứng cuối là học sinh nam ?

Hướng dẫn:

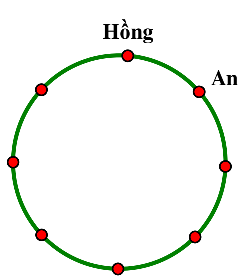
a) Coi 3 bạn nữ cột lại thành một nhóm X, vậy có 1 nhóm X và 5 học sinh nam (coi như 6 học sinh) xếp thành 1 hàng dọc. Xếp X và 5 bạn nam có 6! cách.
+ Sau khi xếp xong, mở nhóm X ra cho 5 học sinh nữ tự hoán vị cho nhau, vậy xếp 3 học sinh nữ trong nhóm X sẽ có 3! Cách.
Kết luận: Vậy có 6!.3! = 4320 cách.

b)
+ Chọn 1 học sinh nữ đứng đầu hàng có 3 cách chọn
+ Chọn 1 học sinh nam đứng cuối hàng có 5 cách chọn.
+ Còn lại 6 vị trí ở giữa, ta chọn 6 học sinh còn lại xếp vào nên có 6! cách.
Kết luận: Tất cả có 3.5.6! = 10800 cách.

Bài 10: Có 4 nữ tên là: Huệ, Hồng, Lan, Hương và 4 nam tên là An, Bình, Hạnh, Phúc cùng ngồi quanh một bàn tròn có 8 chỗ.
a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp biết nam và nữ ngồi xen kẽ nhau ?
b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp biết nam và nữ ngồi xen kẽ nhau nhưng bạn Hồng và An không chịu ngồi cạnh nhau ?

Hướng dẫn:

a)
+ Ta xếp 4 bạn nam trước: vậy có 4! cách.
+ Khi xếp xong, giữa 2 bạn nam có 1 khoảng trống, chọn 4 bạn nữ xếp vào 4 khoảng trống có 4! cách
+ Vì đây là bàn tròn, hơn nữa vai trò 4 bạn nam là như nhau nên sẽ có 4 cách trùng lặp (Do các vị trí đối xứng nhau của bàn tròn - hoặc khi xoay bàn tròn).



+ Vậy có : $\mathbf{\frac{4!.4!}{4} = 144}$ cách sắp xếp

b)
+ Trước hết nếu ta xếp 2 bạn Hồng 9 (nữ) và An (nam) ngồi cạnh nhau sẽ có 2 cách xếp
+ Chọn 3 bạn nam còn lại xếp vào 3 vị trí có 3! cách
+ Chọn 3 bạn nữ xếp vào 3 vị trí xen kẽ có 3! cách
Vậy nếu xếp xen kẽ nhưng Hồng và An luôn ngồi cạnh nhau sẽ có 2.3!.3! = 72 cách
Kết luận: Số cách xếp xen kẽ mà Hồng và An không ngồi cạnh nhau có 144 - 72 = 72 cách.

Bài 11: Một học sinh có 12 cuốn sách đôi một khác nhau, trong đó có 2 cuốn sách môn toán, 4 cuốn sách môn văn, 6 cuốn sách môn tiếng Anh. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp tất cả các cuốn sách lên một kệ sách dài, nếu mọi cuốn sách cùng 1 môn được xếp kề nhau ?

Hướng dẫn:

+ Ta coi 2 cuốn sách toán là 1 nhóm X, 4 cuốn sách văn thành 1 nhóm Y, 6 cuốn sách tiếng Anh thành 1 nhóm Z. Vậy có 3! cách đặt 3 bó sách X, Y, Z lên kệ sách.

+ (Bây giờ coi như cởi dây buộc ra để các cuốn sách trong 1 nhóm tự hoán vị với nhau) Nhóm sách toán có 2! cách xếp, nhóm văn có 4! cách xếp, nhóm tiếng Anh có 6! cách xếp.

+ Vậy tất cả có 3!.2!.4!.6! = 207.360 cách sắp xếp.

Bài 12 (SGK): Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 lập các số gồm 6 chữ số khác nhau. Hỏi :

a) Có bao nhiêu số chẵn, bao nhiêu số lẻ ? **b)** Có bao nhiêu số bé hơn 432000 ?

Hướng dẫn:

a) Gọi các số cần tìm có dạng $\mathbf{n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}}$

+ TH1: n là số chẵn $\Rightarrow \mathbf{a_6 \in \{2;4;6\}}$ nên có 3 cách chọn, còn lại 5 chữ số đầu tiên sẽ có 5! cách sắp xếp.

Vậy tất cả có: 3.5! = 360 số chẵn có 6 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6

+ TH2: n là số lẻ $\Rightarrow \mathbf{a_6 \in \{1;3;5\}}$ nên có 3 cách chọn, còn lại 5 chữ số đầu tiên sẽ có 5! cách sắp xếp.

Vậy tất cả có: 3.5! = 360 số lẻ có 6 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6

b) Gọi các chữ số cần tìm có dạng $\mathbf{n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} < 432000}$

+ TH1: $\mathbf{a_1 \le 3 \Rightarrow a_1 \in \{1;2;3\}}$ nên có 3 cách chọn. 5 chữ số còn lại có 5! cách sắp xếp. Vậy có 3.5! = 360 số.

+ TH2: $\mathbf{a_1 = 4}$ nên có 1 cách chọn $\mathbf{a_2 < 3 \Rightarrow a_2 \in \{1;2\} \Rightarrow a_2}$ có 2 cách chọn. 4 chữ số còn lại có 4! cách sắp xếp. Vậy có 1.2.4! = 48 số

+ TH3: $\mathbf{a_1 = 4 \Rightarrow a_1}$ có 1 cách chọn; $\mathbf{a_2 = 2 \Rightarrow a_2}$ có 1 cách chọn $\Rightarrow \mathbf{a_3 < 2 \Rightarrow a_3 \in \{1\} \Rightarrow a_3}$ có 1 cách chọn. 3 chữ số còn lại có 3! cách sắp xếp. Vậy có 1.1.1.3! = 6 số

Kết luận: Có 360 + 48 + 6 = 414 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 13: Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 người khách vào 10 ghế thành dãy

Hướng dẫn: Có $\mathbf{P_{10} = 10! = 3.628.800}$ cách

Bài 14: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau

Hướng dẫn:

+ Gọi số cần tìm là $\mathbf{n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}}$

+ $\mathbf{a_1 \ne 0 \Rightarrow a_1}$ có 4 cách chọn

+ 4 chữ số còn lại có 4! cách sắp xếp

Vậy tất cả có: 4.4! = 96 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 15: Tính các số tự nhiên đôi một khác nhau có 6 chữ số tạo thành từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 sao cho 2 chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau

Hướng dẫn:

Gọi 2 chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau như 1 nhóm X (chữ số kép X). Vậy ta xét số lập thành từ 5 chữ số: 0; 1; 2; 5 và X

Gọi số cần tìm có dạng $\mathbf{\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}}$

+ $\mathbf{a_1 \ne 0 \Rightarrow a_1}$ có 4 cách chọn

+ Từ $\mathbf{a_2}$ đến $\mathbf{a_5}$ có 4! cách chọn nữa.

+ Tuy nhiên 2 chữ số 3 và 4 trong nhóm X hoán vị cho nhau nên có 2! cách chọn nữa

Kết luận: Có 4.4!.2! = 192 số thỏa mãn yêu cầu.

Bài 16: Một tổ có 10 học sinh. Có bao nhiêu cách:
a) Xếp thành một hàng dọc **b)** Ngồi quanh một bàn tròn 10 ghế ?

Hướng dẫn:

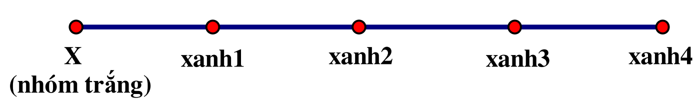
a) Có 10 ! cách **b)** Có $\frac{10!}{10} = 9!$ cách (do có 10 vị trí lặp lại vì là bàn tròn)

Cách khác giải phần b)
+ Người thứ nhất có 1 cách chọn (không kể vị trí, ngồi ở đâu cũng giống nhau - vì bàn tròn) (Nếu bàn dài sẽ có 10 cách chọn). Khi người thứ nhất đã ngồi thì 9 vị trí còn lại cho 9 người ngồi, vậy có 9! cách.
Kết luận: Có 1.9! = 9! cách xếp chỗ.

BÀI TOÁN TỔNG QUÁT: Có bao nhiêu cách sắp xếp n người ngồi xung quanh một bàn tròn ?
TRẢ LỜI:
+ Do các chỗ ngồi xung quanh bàn tròn không có phần tử đầu và phần tử cuối nên người thứ nhất được ngồi tự do.
+ Tiếp theo n - 1 người còn lại chính là số hoán vị của (n - 1) chỗ ngồi còn lại
Vậy số cách sắp xếp là : (n - 1) !
Chú ý: Một cách sắp xếp n phần tử vòng tròn gọi là hoán vị vòng tròn. Sô hoán vị vòng tròn của n phần tử là (n - 1) !

Bài 17: Cho 5 quả cầu màu trắng khác nhau và 4 quả cầu màu xanh khác nhau. Ta sắp xếp 9 quả cầu đó vào một hàng 9 chỗ cho trước:
a) Có bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau ?
b) Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 2 quả cầu đứng cạnh nhau không cùng màu ?
c) Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 5 quả cầu trắng đứng cạnh nhau ?

Hướng dẫn:
a) Có 9! = 362.880 cách
b) Gọi các vị trí cần sắp xếp là (1)-(2)-(3)-(4)-(5)-(6)-(7)-(8)-(9)
+ Giả sử các vị trí (1); (3); (5); (7); (9) để xếp các quả cầu màu trắng, vậy có 5! cách sắp xếp các quả cầu màu trắng.
+ Có 4 vị trí trống là (2); (4); (6); (8) để xếp các quả cầu màu xanh, vậy có 4! cách sắp xếp các quả cầu màu xanh.
Kết luận: Tất cả có 5!.4! = 2880 cách
(Phần này nếu đổi yêu cầu thành xếp theo vòng tròn thì cách làm giống Bài 10)
c) Coi 5 quả cầu màu trắng là 1 nhóm X đi với 4 quả cầu xanh khác nhau.
Vậy coi như sắp xếp X và 4 quả cầu trắng là 5 quả cầu:
+ X có 5 cách xếp



+ 4 quả xanh còn lại có 4! cách sắp xếp
+ 5 quả cầu trắng trong nhóm X lại có 5! cách sắp xếp vị trí.
Vậy tất cả có: 5.4!.5! = 14400 cách sắp xếp.

Bài 18: Có 30 học sinh của trường X tham gia mít tinh trong đó có 4 học sinh cùng lớp; 26 học sinh còn lại chọn từ 13 lớp khác nhau (mỗi lớp 2 học sinh). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 30 học sinh thành 1 hàng sao cho các học sinh cùng 1 lớp thì đứng kề nhau ?

Hướng dẫn:
+ Ta coi các học sinh cùng 1 lớp như 1 nhóm A (Mỗi nhóm A giống như 1 "học sinh kép"). Vậy tất cả có 14 nhóm A

+ Khi xếp 14 nhóm khác nhau (xếp 14 "học sinh kép") thành 1 hàng, ta có : P_4 cách xếp.

+ Tuy nhiên, trong mỗi nhóm 2 người sẽ có 2! cách xếp, mỗi nhóm 4 người sẽ có 4! cách xếp.

Vậy tất cả có $P_{14}.(2!)^{13}.4!$ cách

Bài học 3: CHỈNH HỢP

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bài toán: Cho tập hợp A gồm n phần tử, lấy ra k phần tử của A $(1 \le k \le n)$ và sắp xếp chúng theo một THỨ TỰ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp ?

Hướng dẫn:

+ Công đoạn 1: Lấy phần tử thứ nhất có n cách

+ Công đoạn 2: Lấy phần tử thứ hai có n - 1 = (n - 2) + 1 cách

+ Công đoạn 3: Lấy phần tử thứ ba có n - 2 = (n - 3) + 1 cách

….

….

+ Công đoạn k: Lấy phần tử thứ k có n - (k - 1) = (n - k) + 1 cách

Vậy có tất cả: $n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$ cách

2. Định nghĩa: Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k $(1 \le k \le n)$. Khi lấy ra k phần tử của A và sắp xếp theo 1 trật tự nhất định ta được 1 CHỈNH HỢP chập k của n phần tử của A (Gọi tắt là chỉnh hợp chập k của A)

Ký kiệu: $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Chú ý: $0! = 1; A_n^0 = 1; A_n^n = P_n = n!$

VD1: Có 11 cầu thủ, chọn ra 5 cầu thủ để đá luân lưu, vậy số cách chọn là

$A_{11}^5 = \dfrac{11!}{(11-5)!} = \dfrac{11!}{6!} = 11.10.9.8.7 = 55440$ cách.

VD2: Một nhóm có 5 bạn A; B; C; D; E. Hãy kể ra các cách phân công 3 bạn làm trực nhật: 1 bạn quét nhà, 1 bạn lau bảng, 1 bạn xếp bàn ghế.

$\Rightarrow$ Vậy có $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = 5.4.3 = 60$ cách

VD3: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số từ 1 đến 9.

$\Rightarrow$ Có $A_9^5 = 9.8.7.6.5 = 15120$ số

VD4: Trong mặt phẳng cho một tập hợp gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vecto khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối trong tập hợp này ?

+ Vì một cặp sắp thứ tự gồm 2 điểm A, B cho ta một vecto khác $\vec{0}$, vậy có: $A_6^2 = 6.5 = 30$ vecto

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Có 8 vận động viên chạy thi, nếu không kể trường hợp có 2 vận động viên cùng về đích một lúc, hỏi có bao nhiêu kết quả xảy ra đối với các vị trí 1, 2, 3 ?

Hướng dẫn:

+ Bài toán này thực chất là chọn ra 3 vận động viên xếp giải nhất - nhì - ba (thứ tự 1, 2, 3) từ 8 vận động viên cho trước.

+ Vậy tất cả có: $A_8^3 = 8.7.6 = 336$ kết quả

Bài 2: Trong 1 ban chấp hành gồm 7 người, cần chọn ra 3 người vào ban thường vụ với các chức vụ: bí thư, phó bí thư, ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Hướng dẫn: Có tất cả $\mathbf{A_7^3 = 7.6.5 = 210}$ cách chọn

Bài 3: Có 15 người tham dự một cuộc thi. Kết quả cuộc thi chọn ra 3 giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu kết quả ?

Hướng dẫn: Tương tự bài 1, ta có $\mathbf{A_{15}^3 = 15.14.13 = 2730}$ cách chọn kết quả.

Bài 4: Có 100 người mua 100 vé số, có 4 giải (nhất, nhì, ba, tư)

a) Có bao nhiêu kết quả nếu người giữ vé số 47 đạt giải nhất ?

b) Có bao nhiêu kết quả biết rằng người giữ vé số 47 trúng 1 trong 4 giải ?

Hướng dẫn:

a) Khi người giữ vé số 47 đạt giải nhất (có 1 cách chọn giải cho người này), vậy còn 3 giải nằm trong 99 người còn lại. $\Rightarrow$ có $\mathbf{1.A_{99}^3 = 99.98.97}$ kết quả

b)

+ Nếu người giữ vé 47 đạt giải nhất ta có số kết quả là: $\mathbf{1.A_{99}^3}$

+ Nếu người giữ vé 47 đạt giải nhì ta có số kết quả là: $\mathbf{1.A_{99}^3}$

+ Nếu người giữ vé 47 đạt giải ba ta có số kết quả là: $\mathbf{1.A_{99}^3}$

+ Nếu người giữ vé 47 đạt giải tư ta có số kết quả là: $\mathbf{1.A_{99}^3}$

Vậy có: $\mathbf{4.\left(1.A_{99}^3\right) = 3.764.376}$ kết quả.

Bài 5: Một câu lạc bộ có 25 thành viên, có bao nhiêu cách chọn 3 người vào 3 vị trí: chủ tịch, phó chủ tịch, thủ quỹ ?

Hướng dẫn: Có $\mathbf{A_{25}^3}$ cách chọn

Bài 6: Cho 100000 chiếc vé số được đánh số từ 000000 đến 999999. Hỏi các vé số có 5 chữ số khác nhau là bao nhiêu ?

Hướng dẫn: Thực chất bài toán chính là: "từ 10 chữ số 0; 1; 2; 3; …; 9, lấy ra 1 tập hợp gồm 5 chữ số khác nhau trong 10 chữ số đó. Vậy có $\mathbf{A_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 10.9.8.7.6 = ...}$ vé

Bài 7: Một lớp học có 25 học sinh, chọn ra 1 ban cán sự lớp (lớp trưởng - lớp phó - thủy quỹ). Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Hướng dẫn: Có Có $\mathbf{A_{25}^3}$ cách chọn (giống ý như Bài 5)

Bài 8: Một cuộc khiêu vũ gồm 5 nam và 6 nữ. Cần chọn có thứ tự 3 nam và 3 nữ ghép thành 3 cặp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Hướng dẫn:

+ Chọn 3 nam trong 10 nam theo 1 thứ tự có: $\mathbf{A_{10}^3}$ cách

+ Chọn 3 nữ trong 6 nữ theo 1 thứ tự có: $\mathbf{A_6^3}$ cách

Vậy có tất cả $\mathbf{A_{10}^3.A_6^3 = 86400}$ cách chọn

Bài 9: Có bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau có thể lập thành từ các chữ số 0; 2; 4; 6; 8 ?

Hướng dẫn: Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3}}$

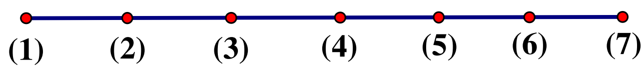
+ $\mathbf{a_1 \neq 0}$ nên có 4 cách chọn

+ 2 số còn lại có $\mathbf{A_4^2}$ cách chọn

Vậy có $\mathbf{4.A_4^2 = 48}$ số

Bài 10: Cần xếp 3 nam và 2 nữ vào 1 hàng ghế có 7 chỗ ngồi sao cho 3 nam ngồi kề nhà và 2 nữ ngồi kề nhau. Hỏi có bao nhiêu cách ?

Hướng dẫn:



TH1: 3 bạn nam chọn các ghế (1); (2); (3) có 1 cách. 2 bạn nữ có 3 cách chọn ghế: $[(4);(5)];[(5);(6)];[(6);(7)]$

Mà 3 bạn nam ngồi cạnh nhau nên có 3! Cách ngồi; 2 bạn nữ ngồi cạnh nhau nên có 2! Cách ngồi.
Vậy tất cả có: 1.3.3!.2! = 36 cách.

TH2: 3 bạn nam chọn các ghế (2); (3); (4) có 1 cách. 2 bạn nữ có 2 cách chọn ghế: $[(5);(6)];[(6);(7)]$

Mà 3 bạn nam ngồi cạnh nhau nên có 3! Cách ngồi; 2 bạn nữ ngồi cạnh nhau nên có 2! Cách ngồi.
Vậy tất cả có: 1.2.3!.2! = 24 cách.

TH3: 3 bạn nam chọn các ghế (3); (4); (5) có 1 cách. 2 bạn nữ có 2 cách chọn ghế: $[(6);(7)];[(1);(2)]$

Mà 3 bạn nam ngồi cạnh nhau nên có 3! Cách ngồi; 2 bạn nữ ngồi cạnh nhau nên có 2! Cách ngồi.
Vậy tất cả có: 1.2.3!.2! = 24 cách.

TH4: 3 bạn nam chọn các ghế (4); (5); (6) có 1 cách. 2 bạn nữ có 2 cách chọn ghế: $[(1);(2)];[(2);(3)]$

Mà 3 bạn nam ngồi cạnh nhau nên có 3! Cách ngồi; 2 bạn nữ ngồi cạnh nhau nên có 2! Cách ngồi.
Vậy tất cả có: 1.2.3!.2! = 24 cách.

TH5: 3 bạn nam chọn các ghế (5); (6); (7) có 1 cách. 2 bạn nữ có 3 cách chọn ghế: $[(1);(2)];[(2);(3)];[(3);(4)]$

Mà 3 bạn nam ngồi cạnh nhau nên có 3! Cách ngồi; 2 bạn nữ ngồi cạnh nhau nên có 2! Cách ngồi.
Vậy tất cả có: 1.3.3!.2! = 36 cách.

KẾT LUẬN: có 36 + 24 + 24 + 24 + 36 = 144 cách

Bài 11: Tính các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ 0; 1; 2; 3; 4; 5 sao cho trong mỗi số đó đều có mặt ít nhất chữ số 1 hoặc 2 ?

Hướng dẫn:

Bước 1: Gọi số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4}}$ ($\mathbf{a_1}$ có 5 cách chọn), vậy có $\mathbf{5.A_5^3 = 300}$ số

Bước 2: Gọi số tự nhiên có 4 chữ số khác hau, không chứa 1 và 2 là $\overline{\mathbf{b_1b_2b_3b_4}}, \mathbf{b_i \in \{0;3;4;5\}}$, b_1 có 3 cách chọn, 3 số còn lại có A_3^3 cách, vậy có $3.A_3^3 = 18$ cách.

Vậy số các số cần tìm là 300 - 18 = 282 số

Bài 12: Với các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt đúng 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng 1 lần ?

Hướng dẫn:

+ Gọi số tự nhiên có 3 chữ số lập thành từ 4 chữ số 0; 1; 2; 3 là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3}}$

+ a_1 có 3 cách chọn, 2 số còn lại có A_3^2 cách chọn, vậy có $3.A_3^2 = 18$ cách chọn.

Bài 13: Với các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu :
a) Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau ?
b) Số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau ?

Hướng dẫn:

a) Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4}}$

+ $a_4 \in \{1;3;5\}$ nên có 3 cách chọn.

+ $a_1 \neq 0$ nên có 4 cách chọn

+ 2 chữ số còn lại có A_4^2 cách chọn, vậy có $3.4.A_4^2 = 144$ số

b) Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4}}$

+ TH1: $a_4 = 0$ nên có 1 cách chọn, vậy có $1.A_5^3$ (số)

+ TH2: $a_4 \neq 0$ nên có 2 cách chọn, a_1 có 4 cách chọn, vậy có $2.4.A_4^2$ (số)

Vậy có $1.A_5^3 + 2.4.A_4^2 = 156$ số

(Chú ý: các TH bài có chữ số 0 đứng đầu cần chia TH)

Bài 14: Có bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau mà có mặt của chữ số 0 và chữ số 9 ?

Hướng dẫn:

+ Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}}$

TH1: $a_1 = 9 \Rightarrow \overline{9a_2a_3a_4a_5a_6}$, vậy có 5 vị trí chọn số 0, có 4 vị trí còn lại chọn 4 trong 8 chữ số còn lại có A_8^4, vậy có $1.5.A_8^4$ (số)

TH2: $a_1 \neq 9; a_2 = 9 \Rightarrow \overline{a_1 9a_3a_4a_5a_6}$, số 0 có 4 vị trí sắp xếp, 4 vị trí còn lại có A_8^4 cách sắp xếp, vậy có $4.A_8^4$ (số). Vì chữ số 9 ở các vị trí từ $a_2 \to a_6$ như nhau nên ta có $5.\left(4.A_8^4\right)$ (số).

Vậy có $1.5.A_8^4 + 5.\left(4.A_8^4\right) = 42000$ (số)

Bài 15: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 lập các số tự nhiên có 9 chữ số khác nhau, có bao nhiêu số :
a) Chia hết cho 5 **b)** Số 9 đứng ở chính giữa ?

Hướng dẫn:

a) Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}}$, $a_9 = 5$ có 1 cách chọn, 8 chữ số còn lại có $8! = P_8 = A_8^8$ cách, vậy có $1.A_8^8 = 40320$ cách

b) Chữ số 9 đứng ở chính giữa có 1 cách chọn, 8 vị trí còn lại chọn trong 8 chữ số còn lại có A_8^8 (cách), vậy có $1.A_8^8 = 40320$ cách.

Bài 16: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 9 ?

Hướng dẫn:

+ Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3}}$

TH1: $\{a_1;a_2;a_3\} = \{0;4;5\}$, a_1 có 2 cách chọn, a_2 có 2 cách chọn, a_3 có 1 cách chọn. Vậy có 2.2.1 = 4 số.

TH2: $\{a_1;a_2;a_3\} = \{1;3;5\};\{2;3;4\}$ đều có 3! Số.

Vậy tất cả có $4 + 2.3! = 16$ số thỏa mãn.

Bài 17: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau bé hơn 345 ?

Hướng dẫn:

+ Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3}} < \mathbf{345}$

TH1: $a_1 = 1$ có 1 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn. Vậy có 1.5.4 = 20 số

TH2: $a_1 = 2$ có 1 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn. Vậy có 1.5.4 = 20 số

TH3: $a_1 = 3, a_2 = 1$, vậy có 1.1.4 = 4 số

TH4: $a_1 = 3, a_2 = 2$, vậy có 1.1.4 = 4 số

TH5: $a_1 = 3, a_2 = 4, a_5 \in \{1;2\}$, vậy có 1.1.2 = 2 số

Vậy tất cả có 20 + 20 + 4 + 4 + 2 = 50 số

Bài 18: Có bao nhiêu số có 6 chữ số được chọn từ các chữ số thuộc $\{\mathbf{1;2;3;4;5;6;7;8}\}$ sao cho các chữ số đôi một khác nhau, chữ số đầu tiên phải là số 4 và chữ số cuối cùng chẵn ?

Hướng dẫn:

+ Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}}$, $a_1 = 4$ có 1 cách, $a_6 \in \{2;6;8\}$ có 3 cách, 4 chữ số còn lại có A_6^4 cách.
Vậy có 1.3. A_6^4 = 1080 số.

Bài 19: Cho 5 chữ số 1; 2; 3; 4; 5
a) Có thể lập được bao nhiêu số lẻ có 4 chữ số khác nhau từ 5 chữ số trên ?
b) Có thể lập được bao nhiêu số chia hết cho 3 có 3 chữ số khác nhau từ 5 chữ số trên ?

Hướng dẫn:
a). Gọi số cần tìm có dạng $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4}}$, $a_4 \in \{1;3;5\}$ nên có 3 cách chọn, các chữ số còn lại có A_4^3 cách chọn.
Vậy có 3. A_4^3 = 72 số lẻ thỏa mãn.
b). Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3}}$, do $(a_1 + a_2 + a_3) \vdots 3 \Rightarrow \{a_1;a_2;a_3\} = \{1;2;3\};\{1;3;5\};\{2;3;4\};\{3;4;5\}$
Ứng với mỗi TH ta lập được 3! số . Vậy có 4.3! = 24 số thỏa mãn.

Bài 20: Ở trường phổ thông có các môn học là Toán, Lý, Hóa, Sinh, Văn, Sử, Địa, Tiếng Anh, Công nghệ, Giáo dục quốc phòng và Thể dục. Cần sắp lịch cho 1 ngày học 5 tiết thuộc 5 môn khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp ?

Hướng dẫn:
+ Ta thấy có tổng cộng 13 môn học khác nhau. Để sắp xếp cho 1 ngày học có 5 tiết học, ta chọn 5 môn từ 13 môn học rồi sắp xếp chúng theo một thứ tự. Vậy có $A_{13}^5 = 154.440$ cách

Bài 21: Có 10 cuốn sách khác nhau và 7 cây bút máy khác nhau. Cần chọn ra 3 cuốn sách và 3 cây bút máy để làm quà tặng cho 3 học sinh, mỗi em 1 cuốn sách và 1 cây bút máy. Hỏi có mấy cách chọn ?

Hướng dẫn:
+ Chọn 3 từ 10 cuốn sách khác nhau có A_{10}^3 cách
+ Chọn từ 3 trong 7 cây bút khác nhau có A_7^3 cách
Vậy có $A_{10}^3.A_7^3 = 151200$ cách

Bài 22: Một lớp có 15 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Trong buổi tập trung lớp đầu năm, giáo viên chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp (1 lớp trưởng, 1 lớp phó, 1 thủ quỹ)
a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?
b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng là nam ?
c) Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu một trong ba bạn được chọn phải có ít nhất 1 nữ ?

Hướng dẫn:
a). Có $A_{35}^3 = 39270$ cách
b). Lớp trưởng là nam có 15 cách chọn. Chọn 2 bạn còn lại từ 34 bạn rồi sắp xếp theo thứ tự có A_{34}^2 cách.
Vậy tất cả có 15. A_{34}^2 = 16830 cách chọn
c) Làm theo PP "phần bù": Giả sử 3 bạn được chọn đều là nam, khi đó có $A_{15}^3 = 2730$ cách.
Vậy tổng số cách thỏa mãn là $39270 - 2730 = 36540$ cách

Bài 23: Trong một chương trình văn nghệ, cần chọn ra 7 bài hát trong 10 bài hát và 3 tiết mục múa trong 5 tiết mục múa rồi xếp thứ tự biểu diễn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu các bài hát được xếp kề nhau và các tiết mục múa được xếp kề nhau ?

Hướng dẫn:
+ Chọn 7 bài hát từ 10 bài hát rồi xếp thứ tự có A_{10}^7 cách, chọn 3 tiết mục múa từ 5 tiết mục rồi xếp thứ tự có A_5^3 cách.
TH1: Hát trước, múa sau, vậy có: $A_{10}^7 . A_5^3$ cách.
TH2: Múa trước, hát sau, vậy có: $A_5^3 . A_{10}^7$ cách.

Vậy tất cả có $A_{10}^7.A_5^3 + A_5^3.A_{10}^7 = 72.576.000$ cách

Bài 24: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên :
a) Có 5 chữ số khác nhau ?
b) Có 6 chữ số khác nhau và số đó phải là số lẻ ?
c) Có 3 chữ số khác nhau và số đó chia hết cho 3 ?

Hướng dẫn:

a). Có $A_9^5 = 15120$ số

b). Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}}$, $a_6 \in \{1;3;5;7;9\}$ nên có 5 cách chọn. Vậy có $5.A_8^4 = 33600$ số

c). Gọi số cần tìm là $\overline{\mathbf{a_1a_2a_3}}$, vậy $(a_1 + a_2 + a_3) \vdots 3$

TH1: $a_1 + a_2 + a_3 = 6 \Rightarrow \{a_1;a_2;a_3\} = \{1;2;3\}$ có 3! số.

TH2: $a_1 + a_2 + a_3 = 9 \Rightarrow \{a_1;a_2;a_3\} \in \{1;2;3\};\{1;3;5\};\{2;3;4\}$ có 3.3! số

TH3: $a_1 + a_2 + a_3 = 12 \Rightarrow \{a_1;a_2;a_3\} \in \{1;2;9\};\{1;3;8\};\{1;4;7\};\{1;5;6\};\{2;3;7\};\{2;4;6\};\{3;4;5\}$ có 7.3! số.

TH4: $a_1 + a_2 + a_3 = 15 \Rightarrow \{a_1;a_2;a_3\} \in \{1;5;9\};\{1;6;8\};\{2;4;9\};\{2;5;8\};\{2;6;7\};\{3;4;8\};\{3;5;7\};\{4;5;6\}$ vậy có tất cả 8.3! số

TH5: $a_1 + a_2 + a_3 = 18 \Rightarrow \{a_1;a_2;a_3\} \in \{1;8;9\};\{2;7;9\};\{3;6;9\};\{3;7;8\};\{4;5;9\};\{3;6;8\};\{5;6;7\}$ có 7.3! số

TH6: $a_1 + a_2 + a_3 = 21 \Rightarrow \{a_1;a_2;a_3\} \in \{4;8;9\};\{5;7;9\};\{6;7;8\}$ có 3.3! số

TH7: $a_1 + a_2 + a_3 = 24 \Rightarrow \{a_1;a_2;a_3\} \in \{7;8;9\}$ có 3! số

Vậy tất cả có 30.3! số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 25: Từ các chữ số 0 đến 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau ? Trong các số đó có bao nhiêu số chẵn, bao nhiêu số lẻ, bao nhiêu số chia hết cho 5 ?

Hướng dẫn:

+ Gọi $\mathbf{n} = \overline{\mathbf{a_1a_2a_3a_4a_5}}$ là số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau, vậy có $9.A_9^4 = 27126$ số có 5 chữ số khác nhau (vì $a_1 \neq 0$ nên có 9 cách chọn)

+ Gọi số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau là $\mathbf{m} = \overline{\mathbf{b_1b_2b_3b_4b_5}}$, vậy $b_5 \in \{0;2;4;6;8\}$, chữ số 0 đứng cuối nên phải chia TH

- TH1: $b_5 = 0$ có 1 cách chọn, vậy có $1.A_9^4$ số

- TH2: $b_5 \neq 0$ có 4 cách chọn, b_1 có 8 cách chọn, vậy có $4.8.A_8^3$ cách chọn.

Vậy có $1.A_9^4 + 4.8.A_8^3 = 12432$ số chẵn thỏa mãn.

+ Theo 2 phần trên thì $\Rightarrow$ số lẻ có 5 chữ số khác nhau là $27126 - 12432 = 14694$

+ Gọi số có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là $\mathbf{p} = \overline{\mathbf{c_1c_2c_3c_4c_5}}$, vậy $c_5 \in \{0;5\}$, chữ số 0 đứng cuối nên phải chia TH

- TH1: $c_5 = 0$ có 1 cách chọn, vậy có $1.A_9^4$ số

- TH2: $c_5 = 5$ có 1 cách chọn, $c_1 \neq 0$ có 8 cách chọn (do $c_1 \neq 5$), vậy có $1.8.A_8^3$ số.

Vậy có $1.A_9^4 + 1.8.A_8^3$ số chia hết cho 5 thỏa mãn yêu cầu.

Bài 26: Có bao nhiêu số tự nhiên có các chữ số khác nhau được lập thành từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6 ?

Hướng dẫn:

+ Từ các chữ số đã cho, có thể lập được các số tự nhiên có 1 chữ số, 2 chữ số, 3 chữ số, 4 chữ số, 5 chữ số, 6 chữ số, vậy có $A_6^1 + A_6^2 + A_6^3 + A_6^4 + A_6^5 + A_6^6 = 1956$ số

Bài 27: Từ tập hợp $\mathbf{X=\{0;1;2;3;4;5;6\}}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5 ?

Hướng dẫn:

+ Gọi $\mathbf{n=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}}$ là số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập nên từ tập X, a_1 có 6 cách chọn ($a_1 \neq 0$), vậy có $6.A_6^4 = 2160$ số có 5 chữ số khác nhau.

+ Giả sử $\mathbf{m=\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}}$ là số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau mà không chứa chữ số 5 $\{b_1;b_2;b_3;b_4;b_5\} \in \{0;1;2;3;4;6\}$, b_1 có 5 cách chọn, vậy có $5.A_5^4 = 600$ số

Vậy có 2160 - 600 = 1560 số

Bài 28: Có bao nhiêu số tự nhiên có đúng 6 chữ số , trong đó số 9 xuất hiện đúng 2 lần, các số khác xuất hiện đúng 1 lần ?

Hướng dẫn:

+ Gọi số cần tìm là $\mathbf{n=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}}$, để số 9 xuất hiện đúng 2 lần thì:

TH1: Số đó có dạng như sau (có 1 chữ số 9 đứng đầu)

$\mathbf{n=\overline{99a_3a_4a_5a_6};\overline{9a_29a_4a_5a_6};\overline{9a_2a_39a_5a_6};\overline{9a_2a_3a_49a_6};\overline{9a_2a_3a_4a_59}}$ tất cả có 9 số, 4 chữ số còn lại được chọn từ 9 số (vì bỏ đi số 9) nên có A_9^4 cách chọn, vậy có $5.A_9^4$ số

TH2: Số đó có dạng như sau (chữ số đứng đầu không phải chữ số 9)

+ $\mathbf{n=\overline{a_199a_4a_5a_6};...;\overline{a_19a_3a_4a_59}}$ có 4 số

+ $\mathbf{n=\overline{a_1a_299a_5a_6};...;\overline{a_1a_29a_4a_59}}$ có 3 số

+ $\mathbf{n=\overline{a_1a_2a_399a_6};\overline{a_1a_2a_39a_59}}$ có 2 số

+ $\mathbf{n=\overline{a_1a_2a_3a_499}}$ có 1 số

Khi đó a_1 có 8 cách chọn (vì bỏ 0 và 9), 3 chữ số còn lại có A_8^3 (vì bỏ a_1 và 9), vậy có $8.A_8^3$ số

Do có 10 trường hợp nên có $10.\left(8.A_8^3\right)$ số

Đáp số toàn bài: $5.A_9^4 + 10.\left(8.A_8^3\right) = 42000$ số

Bài 29: Có 5 bưu thiếp khác nhau, 6 bì thư khác nhau. Cần chọn 3 bưu thiếp bỏ vào 3 bì thư, mỗi bì thư 1 bưu thiếp và gửi cho 3 người bạn, mỗi bạn 1 bưu thiếp. Hỏi có mấy cách ?

Hướng dẫn:

+ Chọn 3 bưu thiếp khác nhau từ 5 chiếc có A_5^3 cách

+ Chọn 3 bì thư khác nhau từ 6 có A_6^3 cách

Vậy có $A_5^3.A_6^3 = 7200$ cách.

Bài 30: Giải phương trình và bất phương trình sau :

1) $\mathbf{P_2.x^2 - P_3.x = 8}$

2) $\mathbf{P_{n+3} = 720.A_n^5.P_{n-5}}$

3) $\mathbf{A_n^5 = 30A_{n-2}^4}$

4) $\mathbf{P_x.A_x^2 + 72 = 6\left(A_x^2 + 2P_x\right)}$

5) $\mathbf{A_x^3 + 5A_x^2 \le 21x}$

Hướng dẫn:

1). $\Leftrightarrow 2!x^2 - 3!x = 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 4$

2). ĐK: $\begin{cases} n \in N^* \\ n-5 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in N^* \\ n \ge 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (n+3)!=720\frac{n!}{(n-5)!}.(n-5)! \Leftrightarrow (n+3)!=720.n! \Leftrightarrow (n+3)(n+2)(n+1)=720 \Leftrightarrow n=7$$

3). ĐK: $n-2\ge 4 \Leftrightarrow n\ge 6, n\in N$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-5)!}=30.\frac{(n-2)!}{(n-2-4)!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-5)(n-6)!}=30.\frac{(n-2)!}{(n-6)!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{n-5}=30 \Leftrightarrow n=25; n=6$$

4). ĐK: $x\ge 2, x\in N$

$$\Leftrightarrow x!\frac{x!}{(x-2)!}+72=6\left[\frac{x!}{(x-2)!}+2.x!\right]$$
$$\Leftrightarrow x!x(x-1)+72=6\left[x(x-1)+2.x!\right]$$
$$\Leftrightarrow x!x(x-1)-12.x!=6x(x-1)-72$$
$$\Leftrightarrow x!(x^2-x-12)=6(x^2-x-12)$$
$$\Leftrightarrow (x^2-x-12)(x!-6)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-12=0 \\ x!-6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3<0 \\ x=3 \end{array}\right.$$

5). ĐK: $x\ge 3, x\in N$

$$\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-3)!}+5.\frac{x!}{(x-2)!}\le 21x$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2)+5x(x-1)\le 21x$$
$$\Leftrightarrow x^2+24x-24\le 0 \Leftrightarrow -6\le x\le 4 \Rightarrow x=3; x=4$$

BÀI TOÁN TÍNH TỔNG (tham khảo)

DẠNG 1: Các số lập được từ tập hợp không chứa chữ số 0

Bài 1: Tính tổng tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau lập thành từ 6 chữ số 1; 3; 4; 5; 7; 8?

Hướng dẫn:

+ Gọi số có 5 chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho là $\mathbf{\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}=a_1.10^4+a_2.10^3+a_3.10^2+a_4.10+a_5}$

+ Khi chữ số 1 nằm ở vị trí hàng đơn vị $\mathbf{a_5=1\Rightarrow a_5}$ có 1 cách chọn, số $\mathbf{\overline{a_1a_2a_3a_4}}$ có 5! cách chọn.

Vậy có $\mathbf{1.5!=120}$ số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 1.

Lập luận tương tự ta cũng có:

+ 120 số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 3.
+ 120 số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 4.
+ 120 số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 5.
+ 120 số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 7.
+ 120 số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 8.

Vậy tổng tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau lập được mà chữ số hàng đơn vị lần lượt là 1; 3; 4; 5; 7; 8 là:

$$\mathbf{(1+3+4+5+7+8)(10^4+10^3+10^2+10+1).120=37332960}$$

Xem giải thích bên dưới:

$$+\left|\begin{array}{l}\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}=a_1.10^4+a_2.10^3+a_3.10^2+a_4.10+1\ \left(a_1;a_2;a_3;a_4\in\{3;4;5;7;8\}\right):\text{ có 120 số dạng này}\\ \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}=a_1.10^4+a_2.10^3+a_3.10^2+a_4.10+3\ \left(a_1;a_2;a_3;a_4\in\{1;4;5;7;8\}\right):\text{ có 120 số dạng này}\\ \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}=a_1.10^4+a_2.10^3+a_3.10^2+a_4.10+4\ \left(a_1;a_2;a_3;a_4\in\{1;3;5;7;8\}\right):\text{ có 120 số dạng này}\\ \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}=a_1.10^4+a_2.10^3+a_3.10^2+a_4.10+5\ \left(a_1;a_2;a_3;a_4\in\{1;3;4;7;8\}\right):\text{ có 120 số dạng này}\\ \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}=a_1.10^4+a_2.10^3+a_3.10^2+a_4.10+7\ \left(a_1;a_2;a_3;a_4\in\{1;3;4;5;8\}\right):\text{ có 120 số dạng này}\\ \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}=a_1.10^4+a_2.10^3+a_3.10^2+a_4.10+8\ \left(a_1;a_2;a_3;a_4\in\{1;3;4;5;7\}\right):\text{ có 120 số dạng này}\end{array}\right.$$

$$=\left[\begin{array}{l}(1+3+4+5+7+8).10^4+(1+3+4+5+7+8).10^3+(1+3+4+5+7+8).10^2\\+(1+3+4+5+7+8).10+(1+3+4+5+7+8).1\end{array}\right].120$$

$$=(1+3+4+5+7+8)\left(10^4+10^3+10^2+10+1\right).120$$

$$=37332960$$

Bài 2: Cho A = {1; 2; 3; 4; 5; 6}.Tính tổng các số có 4 chữ số khác nhau lập được từ tập A

Hướng dẫn:

+ Gọi số có 4 chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho là $\overline{a_1a_2a_3a_4}=a_1.10^3+a_2.10^2+a_3.10+a_4$

+ Khi chữ số 1 nằm ở vị trí hàng đơn vị $a_4=1\Rightarrow a_4$ có 1 cách chọn, số $\overline{a_1a_2a_3}$ có 5! cách chọn.

Vậy có $1.5!=120$ số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 1.

Lập luận tương tự ta cũng có:

+ 120 số có 4 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 2.
+ 120 số có 4 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 3.
+ 120 số có 4 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 4.
+ 120 số có 4 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 5.
+ 120 số có 4 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 6.

Vậy tổng tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau lập được mà chữ số hàng đơn vị lần lượt là 1; 2; 3; 4; 5; 6 là:

$$(1+2+3+4+5+6)\left(10^3+10^2+10+1\right).120=2.799.720$$

DẠNG 2: Các số lập được từ tập hợp chứa chữ số 0

Bài 1: Cho A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} tính tổng các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau lập được từ A

Cách làm: Coi vai trò số 0 như số khác nghĩa là khi số 0 đứng đầu ta cứ coi như nó có nghĩa. tính được tổng tương ứng. Tới đây lại tính tổng tất cả các số có 4 chữ số khác nhau lập từ tập $\{1;2;3;4;5\}$ (chính là các số có 5 chữ số mà 0 đứng đầu), lấy tổng trên trừ tổng dưới là ra kết quả cần tìm

Hướng dẫn:

+ Gọi số có 5 chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}=a_1.10^4+a_2.10^3+a_3.10^2+a_4.10+a_5$

+ Khi chữ số 0 nằm ở vị trí hàng đơn vị $a_5=0\Rightarrow a_5$ có 1 cách chọn, số $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ có 5! cách chọn.

Vậy có $1.5!=120$ số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 0.

Lập luận tương tự ta cũng có:

+ 120 số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 1.
+ 120 số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 2.

+ 120 số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 3.
+ 120 số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 4.
+ 120 số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 5.
Vậy tổng tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau lập được mà chữ số hàng đơn vị lần lượt là 0; 1; 2; 3; 4; 5 là: $\mathbf{S_1=(0+1+2+3+4+5)(10^4+10^3+10^2+10+1).120=19.999.800}$

Tuy nhiên trong tổng trên đã “vô tình” có tính cả số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau mà chữ số đứng đầu $\mathbf{a_1=0}$ (thực chất đó chỉ là số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau). Vậy ta cần lấy kết quả trên trừ đi tổng các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được lập nên từ các chữ số $\mathbf{\{1;2;3;4;5\}}$

Thật vậy: Gọi số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được lập nên từ các chữ số $\mathbf{\{1;2;3;4;5\}}$ là

$\mathbf{\overline{b_1b_2b_3b_4}=b_1.10^3+b_2.10^2+b_3.10+b_4}$

+ Khi chữ số 1 nằm ở vị trí hàng đơn vị $\mathbf{b_4=1\Rightarrow b_4}$ có 1 cách chọn, số $\mathbf{\overline{b_1b_2b_3}}$ có 4! cách chọn.
Vậy có $\mathbf{1.4!=24}$ số có 4 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 1.
Lập luận tương tự ta cũng có:
+ 24 số có 4 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 2.
+ 24 số có 4 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 3.
+ 24 số có 4 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 4.
+ 24 số có 4 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 5.
Vậy tổng tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau lập được mà chữ số hàng đơn vị lần lượt là 1; 2; 3; 4; 5 là: $\mathbf{S_2=(1+2+3+4+5)(10^3+10^2+10+1).24=399.960}$

Kết luận: vậy tổng các số tự nhiên có 5 chữ số lập được từ tập hợp A là : $\mathbf{19.999.800-399.960=19.599.840}$

CÁCH KHÁC: Gọi số có 5 chữ số khác nhau là $\mathbf{\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}}$

BƯỚC 1: Tính tổng các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau mà chữ số đứng đầu $\mathbf{a_1}$ CÓ THỂ bằng 0 vậy có $\mathbf{1.A_6^5}$ số như vậy được lập ra.

+ Khi xét tổng các số nêu trên, ta thấy mỗi chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 đều xuất hiện số lần như nhau ứng với một chữ số nào đó ($\frac{1}{6}$ lần của A_6^5) nên tổng sẽ là: $\mathbf{S_1=\frac{1}{6}.A_6^5.(0+1+2+3+4+5).(10^4+10^3+10^2+10+1)}$

BƯỚC 2: Tính tổng các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau mà chữ số đứng đầu $\mathbf{a_1}$ BẰNG 0 (coi như số có 4 chữ số khác nhau mà chữ số đứng đầu KHÁC 0) vậy có $\mathbf{1.A_5^4}$ số như vậy được lập ra.

+ Khi xét tổng các số nêu trên, ta thấy mỗi chữ số 1; 2; 3; 4; 5 đều xuất hiện số lần như nhau ứng với một chữ số nào đó ($\frac{1}{5}$ lần của A_5^4) nên tổng sẽ là: $\mathbf{S_2=\frac{1}{5}.A_6^5.(1+2+3+4+5).(10^3+10^2+10+1)}$

KẾT LUẬN: vậy tổng các số tự nhiên có 5 chữ số lập được từ tập hợp A là : $\mathbf{S=S_1-S_2=19.599.840}$

Bài 2: Tính tổng các số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau lập từ tập hợp $\mathbf{A=\{0;1;2;3\}}$

Hướng dẫn:
+ Gọi số có 3 chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho là $\mathbf{\overline{a_1a_2a_3}=a_1.10^2+a_2.10+a_3}$

+ Khi chữ số 0 nằm ở vị trí hàng đơn vị $\mathbf{a_3=0\Rightarrow a_3}$ có 1 cách chọn, số $\mathbf{\overline{a_1a_2}}$ có 3! cách chọn.
Vậy có $\mathbf{1.3!=6}$ số có 3 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 0.
Lập luận tương tự ta cũng có:
+ 6 số có 3 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 1.
+ 6 số có 3 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 2.

+ 6 số có 3 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 3.
Vậy tổng tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau lập được mà chữ số hàng đơn vị lần lượt là 0; 1; 2; 3 là: $\mathbf{S_1=(0+1+2+3)(10^2+10+1).6=3.996}$

Tuy nhiên trong tổng trên đã "vô tình" có tính cả số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau mà chữ số đứng đầu $\mathbf{a_1=0}$ (thực chất đó chỉ là số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau). Vậy ta cần lấy kết quả trên trừ đi tổng các số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau được lập nên từ các chữ số $\{1;2;3\}$

Thật vậy: Gọi số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau được lập nên từ các chữ số $\{1;2;3\}$ là $\overline{\mathbf{b_1b_2}}=\mathbf{b_1.10+b_2}$

+ Khi chữ số 1 nằm ở vị trí hàng đơn vị $\mathbf{b_2=1\Rightarrow b_2}$ có 1 cách chọn, số $\mathbf{b_1}$ có 2! cách chọn.
Vậy có $\mathbf{1.2!=2}$ số có 2 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 1.
Lâp luận tương tự ta cũng có:
+ 2 số có 2 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 2.
+ 2 số có 2 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 3.
Vậy tổng tất cả các số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau lập được mà chữ số hàng đơn vị lần lượt là 1; 2; 3 là: $\mathbf{S_2=(1+2+3)(10+1).2=132}$

Kết luận: vậy tổng các số tự nhiên có 3 chữ số lập được từ tập hợp A là : $\mathbf{3.996-132=3.864}$

CÁCH KHÁC: $\mathbf{S=\left(\frac{1}{4}.A_4^3\right).(0+1+2+3).(10^2+10+1)-\left(\frac{1}{3}.A_3^2\right).(1+2+3).(10+1)=3.864}$

Bài học 4: TỔ HỢP

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1). Định nghĩa: Cho tập hợp A gồm n phân tử và số nguyên k với $1\le k\le n$. Mỗi tập hợp con của A có k phần tử được gọi là 1 tổ hợp chập k của n phần tử, gọi tắt là một tổ hợp chập k của A (không tính theo thứ tự)

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{A_n^k}{k!}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}\ \text{(quy ước: } C_n^0=1)$$

2). Tính chất

TC1: $C_n^k=C_n^{n-k}\ \ (0\le k\le n)$

TC2: $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1};C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}\ \ (1\le k\le n)$ - hằng đẳng thức Paxcan

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng, cho tập hợp P gồm 7 điểm (trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng). Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh thuộc P.

Hướng dẫn:
+ Ta có mỗi tập con gồm 3 điểm bất kỳ không thẳng hàng của P sẽ tạo ra 1 tam giác, các đỉnh tam giác không cần tính theo thứ tự, vậy số tam giác tạo thành là $C_7^3=35$ tam giác

Ví dụ 2: Trong một lớp có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Thầy giáo chủ nhiệm cần chọn 4 học sinh nam và 3 học sinh nữ đi tham gia chiến dịch "mùa hè xanh" của đoàn THCS HCM. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Hướng dẫn:
+ Do chỉ cần chọn 4 học sinh nam trong 20 học sinh nam mà không cần quan tâm đến thứ tự nên ta có $C_{20}^4=4845$ cách chọn.
+ Tương tự chọn 3 học sinh nữ trong 15 học sinh nữ có $C_{15}^3=455$ cách
Vậy số cách chọn là 4845.455 = 2204475 cách chọn.

Ví dụ 3: Một tổ có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Cần lập 1 đoàn đại biểu gồm 5 người. Hỏi:
a). Có tất cả bao nhiêu cách lập
b). Có tất cả bao nhiêu cách lập đoàn đại biểu, trong đó có 3 nam và 2 nữ.

Hướng dẫn

a). $C_{10}^5 = 252$ b). $C_6^3.C_4^2 = 120$

Ví dụ 4: Có 16 đội bóng đá tham gia thi đấu. Hỏi cần tổ chức bao nhiêu trận đấu sao cho 2 đội bất kỳ đều gặp nhau đúng 1 lần ?

Hướng dẫn: C_{16}^2 trận đấu.

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Trong 1 BCH đoàn trường gồm 7 người, cần chọn 3 người vào ban thường vụ (không phân biệt chức vụ) thì có bao nhiêu cách chọn ?

Hướng dẫn: $C_7^3 = 35$ cách chọn

Bài 2: Một cuộc thi có 15 người tham dự, cần chọn ra 4 người điểm cao nhất thì có bao nhiêu kết quả ?

Hướng dẫn: C_{15}^4 kết quả

Bài 3: Một tổ gồm 8 nam và 2 nữ. Chọn ra 5 học sinh tham dự học sinh thanh lịch, yêu cầu các học sinh được chọn phải ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Hướng dẫn:

+ Bước 1: Chọn 5 học sinh từ 10 học sinh có C_{10}^5 cách

+ Bước 2: Chọn 5 học sinh từ các học sinh nam có C_8^5 cách

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu là C_{10}^5 - C_8^5 = 196 cách

Cách khác: Chọn 5 học sinh trong đó có 4 nam và 1 nữ có $C_8^4.C_2^1$ cách. Chọn 5 học sinh trong đó có 3 nam và 2 nữ có $C_8^3.C_2^2$ cách. Vậy có $C_8^4.C_2^1 + C_8^3.C_2^2 = 196$ cách

Bài 4: Có 1 nhóm học sinh gồm 7 nam và 3 nữ, chọn ra 5 học sinh để tham gia đồng diễn thể dục sao cho có không quá 1 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn.

Hướng dẫn:

+ Chọn 5 học sinh (1 nữ và 4 nam) có $C_3^1.C_7^4$ cách

+ Chọn 5 học sinh (0 nữ và 5 nam) có $C_7^5.C_3^0$ cách

Vậy có $C_3^1.C_7^4 + C_7^5.C_3^0$ cách

Bài 5: Trong không gian cho tập hợp gồm gồm 25 điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi lập được bao nhiêu tứ diện với các đỉnh thuộc tập hợp các điểm đã cho.

Hướng dẫn: C_{25}^4 tứ diện

Bài 6: Một tổ có 12 người gồm 10 nam và 2 nữ
a). Có bao nhiêu cách chọn 1 tổ gồm 8 người từ 12 người (không phân biệt nam nữ)
b). Có bao nhiêu cách chọn 1 tổ gồm 8 người trong đó có ít nhất 1 nữ
c). Có bao nhiêu cách chọn 1 tổ gồm 8 người toàn nam

Hướng dẫn:

a). $C_{12}^8 = 495$

b). $C_{10}^7.C_2^1 + C_{10}^6.C_2^2 = 450$

c). $C_{12}^8 - 450 = 45$ (hoặc $C_{10}^8 = 45$)

Bài 7:
a). Phân phối 7 chiếc vé cho 7 người hỏi có bao nhiêu cách phân phối

b). Phân phối 32 vé cho 4 người (mỗi người nhận 8 vé). Hỏi có bao nhiêu cách phân phối.

Hướng dẫn

a). Có $7! = 5040$ cách

b). Số cách phân phối cho người thứ nhất C_{32}^{8}, người thứ hai C_{24}^{8}, người thứ ba C_{16}^{8} cách, người thứ tư C_{8}^{8} cách. Vậy có $C_{32}^{8}.C_{24}^{8}.C_{16}^{8}.C_{8}^{8}$ cách

Bài 8: Một lớp học có 40 học sinh trong đó 25 nam và 15 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 học sinh:
a). Số học sinh nam và nữ tùy ý
b). Phải có 2 nam và 2 nữ
c). Phải có ít nhất 1 nữ

Hướng dẫn

a). $C_{40}^{4} = 91390$ cách

b). $C_{25}^{2}.C_{15}^{2} = 31500$ cách

c). Sử dụng PP "phần bù": Số cách chọn 4 học sinh toàn nam có C_{25}^{4} cách, vậy số cách chọn ít nhất 1 nữ là $C_{40}^{4} - C_{25}^{4} = 78740$ cách.

Cách khác: liệt kê các trường hợp

- TH1: chọn 1 nữ & 3 nam có $C_{15}^{2}.C_{25}^{3}$ cách
- TH2: chọn 2 nữ & 2 nam có $C_{15}^{2}.C_{25}^{2}$ cách
- TH3: chọn 3 nữ & 1 nam có $C_{15}^{3}.C_{25}^{1}$ cách
- TH4: chọn 4 nữ & 0 nam có $C_{15}^{4}.C_{25}^{0}$ cách

Vậy có $C_{15}^{2}.C_{25}^{3} + C_{15}^{2}.C_{25}^{2} + C_{15}^{3}.C_{25}^{1} + C_{15}^{4}.C_{25}^{0} = 78740$ cách

Bài 9: Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số sao cho trong mỗi số đó, chữ số hàng ngàn lớn hơn chữ số hàng trăm, chữ số hàng trăm lớn hơn chữ số hàng chục, chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị.

Hướng dẫn:

+ Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4}, 9 \geq a_1 > a_2 > a_3 > a_4 \geq 0$

+ Gọi $X = \{0;1;2;...;9\}$, vậy có $C_{10}^{4} = 210$ số

Bài 10: Một nhóm công nhân gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để thành lập một tổ công tác sao cho phải có 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Hướng dẫn:

TH1: chọn 1 nữ & 4 nam

- Chọn 1 nữ có $C_{5}^{1} = 5$ cách
- Chọn 2 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^{2} cách
- Chọn 2 nam còn lại có C_{13}^{2} cách

Vậy có $C_{5}^{1}.A_{15}^{2}.C_{13}^{2}$ cách

TH2: chọn 2 nữ & 3 nam

- Chọn 2 nữ có C_{5}^{2} cách
- Chọn 2 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^{2} cách
- Chọn 1 nam còn lại có C_{13}^{1} cách

Vậy có $C_{5}^{2}.A_{15}^{2}.C_{13}^{1}$ cách

TH3: chọn 3 nữ & 2 nam có $C_5^3.A_{15}^2$ cách

Đáp số toàn bài: $C_5^1.A_{15}^2.C_{13}^2 + C_5^2.A_{15}^2.C_{13}^1 + C_5^3.A_{15}^2 = 111300$ cách.

Cách khác

Bước 1: chọn 2 nam trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách

Bước 2: chọn 3 tổ viên trong đó có ít nhất 1 nữ

TH1: chọn 1 nữ và 2 nam có $C_5^1.C_{13}^2$ cách

TH2: chọn 2 nữ và 1 nam có $C_5^2.C_{13}^1$ cách

TH3: chọn 3 nữ có C_5^3 cách

Vậy tất cả có $A_{15}^2.(C_5^1.C_{13}^2 + C_5^2.C_{13}^1 + C_5^3) = 111300$ cách

Bài 11: Một nhóm có 7 nam và 6 nữ, chọn ra 3 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Hướng dẫn: PP phần bù

Bước 1: chọn 3 người tùy ý trong 13 người ta có C_{13}^3 cách

Bước 2: chọn 3 nam (không có nữ) trong 7 nam ta có C_7^3 cách

Vậy có $C_{13}^3 - C_7^3 = 251$ cách chọn

Bài 12: Một hội đồng quản trị của 1 công ty gồm 12 người trong đó có 5 nữ. Từ HĐQT đó bầu ra 1 chủ tịch HĐQT, 1 phó chủ tịch HĐQT và 2 ủy viên. Hỏi có mấy cách bầu sao cho 4 người được bầu phải có nữ.

Hướng dẫn: PP phần bù

Bước 1: Bầu ra 4 người tùy ý:

- Bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_{12}^2 cách
- Bầu 2 ủy viên có C_{10}^2 cách

Vậy có $A_{12}^2.C_{10}^2$ cách

Bước 2: Bầu 4 người toàn nam (không có nữ)

- Bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_7^2 cách
- Bầu 2 ủy viên có C_5^2 cách

Vậy có $A_7^2.C_5^2$ cách

Đáp số toàn bài: $A_{12}^2.C_{10}^2$ - $A_7^2.C_5^2$ = 5520 cách.

Bài 13: Tập hợp X gồm 10 phần tử khác nhau. Tính số tập hợp con khác $\varnothing$ chứa một số chẵn các phần tử của X.

Hướng dẫn

ĐS: $C_{10}^2 + C_{10}^4 + C_{10}^6 + C_{10}^8 + C_{10}^{10} = 511$ tập hợp (hoặc cách cấp 2: số tập con của X gồm 10 phần tử là 2^{10}, bỏ đi một tập hợp $\varnothing$ ta có $2^{10} - 1$ tập hợp.

Bài 14: Giải vô địch bóng đá quốc gia có 14 đội tham gia thi đấu vòng tròn 1 lượt, biết rằng trong 1 trận đấu đội thắng được 3 điểm, hòa 1 điểm, thua 0 điểm và có 23 trận hòa. Tính số điểm trung bình của 1 trận trong toàn giải.

Hướng dẫn:

+ Do thi đấu vòng tròn 1 lượt nên 2 đội bất kỳ chỉ đấu với nhau đúng 1 trận, vậy số trận đấu của giải là $C_{14}^2 = 91$

+ Tổng số điểm của 2 đội trong 1 trận hòa là 2, vậy tổng số điểm của 23 trận hòa là 46

+ Tổng số điểm của 2 đội trong 1 trận KHÔNG HÒA là 3, vậy tổng số điểm của $C_{14}^2 - 23 = 68$ trận không

hòa là 3.68 = 204.

Vậy điểm trung bình của 1 trận là $\frac{46+204}{91}=\frac{250}{91}$

Bài 15: Tính số các số tự nhiên gồm 7 chữ số được chọn ra từ các chữ số 1,2,3,4,5 sao cho chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần.

Hướng dẫn:

+ Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2...a_7}$

+ Ta coi 7 chữ số như 7 vị trí thẳng hàng.

Bước 1: chọn 2 trong 7 vị trí để xếp chữ số 2 có $C_7^2=21$ cách

Bước 2: chọn 3 trong 5 vị trí còn lại để xếp chữ số 3 có $C_5^3=10$ cách

Bước 3: chọn 2 trong 3 chữ số còn lai (1,4,5) để xếp vào 2 vị trí còn lại (có hoán vị) có A_3^2 cách

ĐS có $C_7^2.C_5^3.A_3^2=1260$ cách

Bài 16: Một tổ gồm 8 nam và 6 nữ, cần lấy 1 nhóm 5 người trong đó có 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Hướng dẫn:

+ Lấy 2 nữ trong 6 nữ có C_6^2 cách

+ Lấy 3 nam trong 8 nam có C_8^3 cách

Vậy có $C_6^2.C_8^3$ = 840 cách.

Bài 17: Cho 2 đường thẳng a // b, trên đường thẳng a lấy 17 điểm phân biệt, trên đường thẳng b lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên a và b.

Hướng dẫn

TH1: tam giác tạo thành có 1 đỉnh trên a và 2 đỉnh trên b, vậy trên a có 17 cách chọn đỉnh, trên b có C_{20}^2 cách chọn đỉnh. KL: có $17.C_{20}^2$ cách

TH2: tam giác tạo thành có 1 đỉnh trên b và 2 đỉnh trên a, vậy trên b có 20 cách chọn đỉnh, trên a có C_{17}^2 cách chọn đỉnh. KL: có $20.C_{17}^2$ cách

Đáp số toàn bài: $17.C_{20}^2 + 20.C_{17}^2$ = 5950 cách

Bài 18: Tìm tất cả các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

Hướng dẫn:

+ Xét $X=\{1;2;3;...;9\}$ không có chữ số 0 (vì số 0 không thể đứng đầu)

+ Chọn 5 chữ số trong 9 chữ số trên ta có C_9^5 cách

+ Mỗi trường hợp chọn được ở trên ta chỉ sắp xếp được đúng 1 số thỏa mãn số sau lớn hơn số liền trước, vậy có 1 cách sắp xếp. ĐS toàn bài có $C_9^5.1$ = 126 cách

Bài 19: Có 10 học sinh trong đó 3 học sinh giỏi, 4 học sinh khá, 3 học sinh trung bình. Chọn 1 nhóm gồm 3 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho:
1). Trong nhóm được chọn mỗi loại có 1 học sinh
2). Trong nhóm được chọn không có học sinh trung bình

Hướng dẫn

1). Chọn 1 hs giỏi trong số 3 hs có 3 cách, chọn 1 hs khá trong số 4 hs có 4 cách, chọn 1 hs trung bình trong số 3 hs có 3 cách. Vậy có 3.4.3 = 36 cách

2). Chọn 3 học sinh trong số 7 học sinh (gồm 3 hs giỏi và 4 hs khá) có $C_7^3=35$ cách

Bài 20: Một bó hoa gồm 10 bông hồng bạch và 10 bông hồng nhung. Bạn An muốn chọn ra 5 bông để cắm

bình trong đó nhất thiết phải có 2 bông bạch và 2 bông nhung. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Hướng dẫn:

TH1: chọn 2 bông bạch và 3 bông nhung có $C_{10}^2.C_{10}^3 = 5400$ cách

TH2: chọn 3 bông bạch và 2 bông nhung có $C_{10}^3.C_{10}^2 = 5400$ cách

Vậy có 5400 + 5400 = 10800 cách

Bài 21: Cho n điểm trong mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tìm n sao cho số tam giác mà đỉnh trùng với các điểm đã cho gấp đôi số đoạn thẳng được nối từ các điểm ấy.

Hướng dẫn

+ Vì nối 2 trong n điểm đã cho ta được 1 đoạn thẳng, vậy có C_n^2 đoạn thẳng

+ Nối 3 điểm trong n điểm đã cho ta được 1 tam giác, vậy có C_n^3 tam giác

+ Theo giả thiết ta có $C_n^3 = 2.C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!3!} = 2.\frac{n!}{(n-2)!2!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3.2} = 2\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 8$

Bài 22: Một nhóm học sinh gồm 7 nam và 3 nữ, giáo viên muốn chọn ra 5 em trong nhóm để làm công tác xã hội. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

a). Chọn ra 5 em tùy ý

b). Nhất thiết (ít nhất) phải có 1 nữ 3 nam

c). Phải có ít nhất 1 nữ

Hướng dẫn

a). $C_{10}^5 = 252$ cách chọn

b). TH1 chọn 1 nữ & 4 nam, TH2 chọn 2 nữ & 3 nam, vậy có $C_3^1.C_7^4 + C_3^2.C_7^3 = 210$ cách

c). PP phần bù. Chọn 5 học sinh toàn nam có C_7^5 cách, vậy chọn 5 học sinh có ít nhất 1 nữ là $252 - C_7^5 = 231$

Bài 23: Một bộ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài, chia thành 4 phần bằng nhau (mỗi phần 13 quân). Hỏi có bao nhiêu cách chia được 1 phần sao cho :

a). có 2 con át

b). có ít nhất 1 con át

Hướng dẫn

a). Chọn 13 quân trong đó có 2 quân át: chọn 2 quân át trong 4 quân át có C_4^2 cách, tiếp theo chọn 11 quân còn lại trong 48 quân (bỏ 4 quân át ra không chọn: 52 - 4 = 48) có C_{48}^{11} cách. Vậy có $C_4^2.C_{48}^{11}$ cách

b). PP phần bù:

Bước 1: số cách chọn 1 phần gồm 13 con trong 52 con bài là C_{52}^{13} cách

Bước 2: số cách chọn 1 phần gồm 13 con trong 52 con mà không có bất kỳ con át nào có C_{48}^{13} cách

Vậy tất cả có C_{52}^{13} - C_{48}^{13} cách.

Bài 24: Một bộ bài tây có 52 con, cần rút ra 5 con bài. Hỏi có bao nhiêu cách :

a). rút tùy ý

b). rút có ít nhất 2 con át.

Hướng dẫn

a). C_{52}^5 cách

b). TH1: rút 5 con có đúng 2 con át có $C_4^2.C_{48}^3$ cách. TH2: rút 5 con có đúng 3 con át có $C_4^3.C_{48}^2$ cách. TH3: rút 5 con có đúng 4 con át có $C_4^4.C_{48}^1$ cách. Vậy tất cả có $C_4^2.C_{48}^3$ + $C_4^3.C_{48}^2$ + $C_4^4.C_{48}^1$ cách.

Bài 25: Một người có 4 pho tượng khác nhau và muốn bày 4 pho tượng vào dãy 6 vị trí trên 1 kệ trang trí. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp.

Hướng dẫn: có A_6^4 cách

Bài 26: Một người có 8 pho tượng khác nhau và muốn bày 6 pho tượng vào 6 vị trí trên 1 kệ trang trí. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp.

Hướng dẫn

+ Chọn 6 pho tượng trong 8 pho tượng có C_8^6 cách

+ Sắp xếp 6 pho tượng đã chọn vào 6 vị trí có $A_6^6 = 6!$ cách.

Vậy tất cả có $C_8^6.6! = 20160$ cách.

Bài 27: Có n nam và n nữ ngồi vào 2 dãy ghế đối diện, có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho:
a). nam và nữ ngồi tùy ý
b). nam và nữ ngồi đối diện nhau

Hướng dẫn

a). B1: chọn n người trong 2n người có C_{2n}^n cách. B2: xếp n người đó vào n vị trí có $A_n^n = n!$ cách. B3: chọn dãy ghế có 2 cách. Vậy tất cả có $2.C_{2n}^n.n!$ cách

b). B1: xếp n nam vào 1 dãy có n! cách. B2: xếp n nữ vào 1 dãy có n! cách. B3: đổi chỗ n cặp nam nữ có $2.2.2...2 = 2^n$ cách. Vậy tất cả có $n!.n!.2^n$ cách.

Bài 28: Từ các chữ số 0,1,2,3,4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số trong đó số 1 có mặt đúng 3 lần và các số khác nhau có mặt đúng 1 lần.

Hướng dẫn: gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2....a_7}$

+ TH1: $a_1 = 1$: chọn 2 vị trí trong 6 vị trí cho số 1 là C_6^2 cách, 4 vị trí còn lại cho 4 số 0,2,3,4 có 4! cách. Vậy tất cả có $1.C_6^2.4!$ cách.

+ TH2: $a_1 \neq 1$: chọn 3 vị trí cho số 1 có C_6^3 cách, chọn 3 vị trí cho số 0 có C_3^1 cách, chọn 3 vị trí còn lại cho 3 số còn lại có 3! cách. Vậy tất cả có $3.C_6^3.3!$ cách

Đáp số toàn bài : có $1.C_6^2.4! + 3.C_6^3.3! = 720$ cách.

Bài 29: Một bác nông dân có 6 con bò, 4 con heo. Một người nông dân khác đến hỏi mua 2 con bò và 3 con heo. Hỏi có mấy cách chọn mua.

Hướng dẫn: $C_6^2.C_4^3 = 60$ cách.

Bài 30: Một lớp có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 6 học sinh tham gia trồng cây. Hỏi có mấy cách chọn sao cho:
a) không phân biệt nam và nữ
b) có 4 nam và 2 nữ
c) có ít nhất là 3 học sinh nam

Hướng dẫn

a) có $C_{40}^6 = 3838380$ cách

b) có $C_{25}^4.C_{15}^2 = 1328250$ cách

c) TH1: chọn 3 nam & 3 nữ có $C_{15}^3.C_{25}^3$ cách. TH2: chọn 4 nam & 2 nữ có $C_{15}^4.C_{25}^2$ cách. TH3: chọn 4 nam & 1 nữ có $C_{15}^5.C_{25}^1$ cách. TH4: chọn 6 nam & 0 nữ có $C_{15}^6.C_{25}^0$ cách.

Vậy có $C_{15}^3.C_{25}^3 + C_{15}^4.C_{25}^2 + C_{15}^5.C_{25}^1 + C_{15}^6.C_{25}^0$ cách.

Bài 31: Một chi đoàn có 25 đoàn viên trong đó có 10 nữ. Muốn chọn 1 tổ công tác gồm 7 người. Có bao nhiêu cách chọn nếu :
a) trong tổ có đúng 3 nữ

b) trong tổ ít nhất 2 nữ

Hướng dẫn

a) $C_{10}^3.C_{15}^4 = 163800$ cách

b) $C_{10}^2.C_{15}^5 + C_{10}^3.C_{15}^4 + C_{10}^4.C_{15}^3 + C_{10}^5.C_{15}^2 + C_{10}^6.C_{15}^1 + C_{10}^7$ cách

Bài 32: Một đội xây dựng gồm 10 công nhân, 3 kỹ sư. Để lập 1 tổ công tác cần chọn 1 kỹ sư trưởng là tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 3 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Hướng dẫn: có $C_3^1.C_{10}^1.C_9^3 = 2520$ cách

Bài 33: Một đội văn nghệ gồm 10 học sinh nam và 10 học sinh nữ, cô giáo muốn chọn ra 1 tốp ca gồm 5 em trong đó có ít nhất 2 em là nam và 2 em là nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Hướng dẫn

TH1: chọn 3 nam & 2 nữ có $C_{10}^3.C_{10}^2$ cách. TH2: chọn 2 nam & 3 nữ có $C_{10}^2.C_{10}^3$ cách.

Vậy tất cả có $C_{10}^3.C_{10}^2 + C_{10}^2.C_{10}^3$ cách

Bài 34: Một đội cảnh sát gồm 9 người, trong ngày cần 3 người làm nhiệm vụ tại địa điểm A, 2 người làm nhiệm vụ tại địa điểm B, còn 4 người trực đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công.

Hướng dẫn: có $C_9^3.C_6^2.1$ cách.

Bài 35: Có 15 điểm khác nhau trên mặt phẳng, không có bất kỳ 3 điểm nào trong số đó thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác, tứ giác có đỉnh là một trong các điểm đã cho.

Hướng dẫn: có $C_{15}^3 = 455$ tam giác, có $C_{15}^4 = 1365$ tứ giác

Bài 36: Có 6 đường thẳng song song và 12 đường thẳng song song khác. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành.

Hướng dẫn: Để có 1 hình bình hành, ta cần chọn ra 2 đường thẳng song song, rồi chọn tiếp 2 đường thẳng song song và cắt 2 đường thẳng đã chọn trước đó. Vậy có $C_6^2.C_{12}^2 = 990$ hình bình hành.

Bài 37: Cho 2 đường thẳng song song a và b, trên a có 10 điểm phân biệt và trên b có 13 điểm phân biệt.
a) Có bao nhiêu hình thang được tạo thành từ các điểm nằm trên 2 đường thẳng đã cho.
b) Có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm nằm trên 2 đường thẳng đã cho.

Hướng dẫn

a) Để có được 1 hình thang, ta chọn từ đường thẳng a ra 2 điểm, chọn từ đường thẳng b ra 2 điểm, vậy có $C_{10}^2.C_{13}^2 = 3510$ cách chọn.

b) TH1: tam giác có 2 đỉnh trên a, 1 đỉnh trên b ta có $C_{10}^2.C_{13}^1 = 585$ tam giác. TH2: tam giác có 1 đỉnh trên a, 2 đỉnh trên b có $C_{10}^1.C_{13}^2 = 780$ tam giác. Vậy tất cả có 585 + 780 = 1365 tam giác.

Bài 38: Đội văn nghệ nhà trường có 7 nam và 9 nữ, cần chọn ra 5 nam và 5 nữ để ghép thành 5 cặp nam nữ trình diễn tiết mục thời trang. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thỏa mãn yêu cầu.

Hướng dẫn: chọn ra 5 nam có C_7^5 cách, chọn ra 5 nữ có C_9^5 cách, ghép 5 nam và 5 nữ với nhau có 5! cách.

Vậy tất cả có $C_7^5.C_9^5.5!$ = 371520 cách.

Bài 39: Cần chia 18 học sinh của 1 lớp thành 3 tổ 1,2,3 khác nhau - mỗi tổ có 6 học sinh để tham gia làm vệ sinh trường ở 3 địa điểm khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chia.

Hướng dẫn

* Nhóm 1: chọn 6 học sinh từ 18 học sinh có C_{18}^6 cách

* Nhóm 2: chọn 6 học sinh từ 12 học sinh có C_{12}^6 cách

* Nhóm 2: chọn 6 học sinh từ 6 học sinh có C_6^6 cách

Vậy tất cả có $C_{18}^6.C_{12}^6.C_6^6$ cách.

Bài 40: Giải các PT, HPT, BPT sau

1). $C_x^1+6.C_x^2+6.C_x^3=9x^2-14x$

2). $C_n^3=5C_n^1$

3). $C_{2n}^3=20C_n^2$

4). $C_{n-1}^4-C_{n-1}^3-\frac{5}{4}A_{n-2}^2<0$

5). $A_{n-2}^3=C_{n-1}^2$

6). $A_n^3\le 2.C_{n-1}^3+P_2$,

7). $\begin{cases}C_n^m=C_n^{m+2}\\C_n^2=153\end{cases}$

8). $\begin{cases}C_n^m=C_n^{m+2}\\C_n^2=153\end{cases}$,

Hướng dẫn

1). $C_x^1+6.C_x^2+6.C_x^3=9x^2-14x$

ĐK: $x\in N^*;x\ge 3$

$$\Leftrightarrow \frac{x!}{1!(x-1)!}+6.\frac{x!}{2!(x-2)!}+6.\frac{x!}{3!(x-3)!}=9x^2-14x$$

$$\Leftrightarrow x+x(x-1).3+\frac{6.x.(x-1)(x-2}{3}=9x^2-14x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2<3\\x=7\end{array}\right.$$

2). $C_n^3=5C_n^1$

ĐK: $x\in N^*;x\ge 3$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!}=5.\frac{n!}{1!(n-1)!}\Leftrightarrow\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=5\frac{n}{1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=7\\n=-4<3\end{array}\right.$$

3). $C_{2n}^3=20C_n^2$

ĐK: $n\in N^*,n\ge 2$

$$\Leftrightarrow\frac{(2n)!}{(2n-3)!3!}=20.\frac{n!}{2!(n-2)!}\Leftrightarrow\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}=20.\frac{n(n-1)}{2}\Leftrightarrow n=8$$

3). $\begin{cases}2A_x^y+5C_x^y=90\\5A_x^y-2C_x^y=80\end{cases}$

ĐK: $x\ge y;x,y\in N^*$, đặt $X=A_x^y;Y=C_x^y$ thay vào và giải hệ ta được

$$\begin{cases}A_x^y=20\\C_x^y=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x!}{(x-y)!}=20\\\frac{x!}{y!(x-y)!}=10\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{y}.20=10\Rightarrow y=2;x=5$$

4). $C_{n-1}^4-C_{n-1}^3-\frac{5}{4}A_{n-2}^2<0$

ĐK: $n\in N^*;n\ge 5$

$$\Leftrightarrow\frac{(n-1)!}{4!(n-5)!}-\frac{(n-1)!}{3!(n-4)!}-\frac{5}{4}\frac{(n-2)!}{(n-4)!}<0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4.3.2}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3.2}-\frac{5}{4}\frac{(n-2)(n-3)}{1}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-4)}{4.3.2}-\frac{(n-1)}{3.2}-\frac{5}{4}<0 \Leftrightarrow -2<n<11 \Rightarrow n\in\{5;6;7;8;9;10\}$$

5). $A_{n-2}^{3}=C_{n-1}^{2}$

ĐK: $n\ge 2; n\in N$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-2)!}{(n-5)!}=\frac{(n-1)!}{(n-3)!2!} \Leftrightarrow (n-2)(n-3)(n-4)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n-2=0 \\ (n-3)(n-4)=\frac{1}{2}(n-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=\frac{5}{2}<2 \end{array}\right.$$

6). $A_{n}^{3}\le 2.C_{n-1}^{3}+P_{2}$,

ĐK: $n\ge 1; n\in N$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!}\le 2\frac{(n-1)!}{(n-4)!3!}+2! \Leftrightarrow n(n-1)(n-2)\le \frac{2}{6}(n-1)(n-2)(n-3)+2$$

$$\Leftrightarrow 4n^{3}-6n^{2}-10n\le 0 \Leftrightarrow 2n^{2}-3n-5\le 0 \Leftrightarrow -1\le n\le \frac{5}{2} \Rightarrow n\in\{1;2\}$$

7). $\begin{cases} C_{n}^{m}=C_{n}^{m+2} \\ C_{n}^{2}=153 \end{cases}$

ĐK: $m\ge 0; n\ge 1; n\ge m$

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{n!}{(n-m)!m!}=\frac{n!}{(n-m-2)!(m+2)!} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(n-m)(n-m-1)}=\frac{1}{(m+2)(m+1)} \\ n(n-1)=306 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(18-m)(17-m)}=\frac{1}{(m+2)(m+1)} \\ \left[\begin{array}{l} n=8 \\ n=-17(loai) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 38m=304 \\ n=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=8 \\ n=18 \end{cases}$$

8). $\begin{cases} C_{y}^{x}=C_{y}^{x+1} \\ A_{y}^{2}=20 \end{cases}$

ĐK: $x\ge 0; y\ge 0; x\le y; x,y\in N$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y!}{(y-x)!x!}=\frac{y!}{(y-x-1)!(x+1)!} \\ \frac{y!}{(y-2)!}=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y-x}=\frac{1}{x+1} \\ y(y-1)=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$$

PHẦN 2: CÁC DẠNG TOÁN ÔN THI THPT QUỐC GIA

Dạng 1: CÁC BÀI TOÁN CHỌN VẬT - CHỌN NGƯỜI

Bài 1: Một hộp đựng 40 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng, 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ 3 màu ?

HƯỚNG DẪN

+ TH1: Chọn 4 viên bi toàn màu trắng có C_5^4 cách

+ TH2: Chọn 4 viên bi toàn màu vàng có C_6^4 cách

+ TH3: Chọn 4 viên bi toàn màu đỏ có C_{40}^4 cách

+ TH4: Chọn 4 viên bi toàn màu đỏ và màu trắng có $C_{45}^4 - \left(C_{40}^4 + C_5^4\right)$ cách

(Giải thích: làm theo phương pháp phần bù:

B1: Chọn 4 viên bi bất kỳ trong 45 viên (cả đỏ và trắng) có C_{45}^4 cách

B2: Chọn 4 viên bi không thỏa mãn yêu cầu: (có 2 TH)

- Chọn 4 viên toàn đỏ có: C_{40}^4 cách
- Chọn 4 viên toàn trắng có: C_5^4 cách)

+ TH5: Chọn 4 viên bi toàn màu đỏ và màu vàng có $C_{46}^4 - \left(C_{40}^4 + C_6^4\right)$ cách

+ TH6: Chọn 4 viên bi toàn màu trắng và vàng có $C_{11}^4 - \left(C_5^4 + C_6^4\right)$ cách

Kết luận: vậy số cách chọn 4 viên bi thỏa mãn yêu cầu đề bài là :

$$C_5^4 + C_6^4 + C_{40}^4 + \left[C_{45}^4 - \left(C_{40}^4 + C_5^4\right)\right] + \left[C_{46}^4 - \left(C_{40}^4 + C_6^4\right)\right] + \left[C_{11}^4 - \left(C_5^4 + C_6^4\right)\right] = 221100 \text{ cách}$$

Bài 2: Một hộp đựng 7 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng.
a) Có bao nhiêu cách lấy ra 7 viên bi đủ 3 màu, trong đó có 3 viên bi màu xanh và nhiều nhất 2 viên bi đỏ.
b) Có bao nhiêu cách lấy ra 8 viên bi có đủ 3 màu ?

HƯỚNG DẪN

a) Vì bắt buộc phải có 3 bi xanh nên có 2 TH sau :

+ TH1: Chọn 1 bi đỏ + **3 bi xanh** + 3 bi vàng có $C_5^1.C_7^3.C_4^3$ cách

+ TH2: Chọn 2 bi đỏ + **3 bi xanh** + 2 bi vàng có $C_5^2.C_7^3.C_4^2$ cách

Vậy có $C_5^1.C_7^3.C_4^3 + C_5^2.C_7^3.C_4^2 = 2800$ cách

b) Sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Chọn 8 viên bi bất kỳ trong tổng số 16 viên bi có C_{16}^8 cách

* **Bước 2:** Chọn 8 viên bi không thỏa mãn yêu cầu (không có đủ 3 màu) :

+ TH1: Chọn 8 viên bi xanh + đỏ có C_{12}^8

+ TH2: Chọn 8 viên bi xanh + vàng có C_{11}^8 cách

+ TH3: Chọn 8 viên bi đỏ + vàng có C_9^8 cách

Đáp số: Vậy có $C_{16}^8 - \left(C_{12}^8 + C_{11}^8 + C_9^8\right) = 12201$ cách

Bài 3: Một hộp đựng 15 viên bi khác nhau gồm 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Tính số cách chọn 4 viên bi từ hộp sao cho không có đủ 3 màu.

HƯỚNG DẪN

+ **TH1:** Chọn 4 bi toàn đỏ có C_4^4 cách

+ **TH2:** Chọn 4 bi toàn trắng có C_5^4 cách

+ **TH3:** Chọn 4 bi toàn vàng có C_6^4 cách

+ **TH4:** Chọn 4 bi đỏ và trắng có $C_9^4-\left(C_4^4+C_5^4\right)$ cách

+ **TH5:** Chọn 4 bi đỏ và vàng có $C_{10}^4-\left(C_4^4+C_6^4\right)$ cách

+ **TH6:** Chọn 4 bi trắng và vàng có $C_{11}^4-\left(C_5^4+C_6^4\right)$ cách

Cộng các kết quả của 6 TH nêu trên ta có đáp số 645 cách

Bài 4: Có bao nhiêu cách sắp xếp 15 viên bi vào 3 hộp đựng bi ?

HƯỚNG DẪN

+ 1 viên bi có 3 cách chọn hộp $\Rightarrow$ 15 viên bi có 3^{15} cách xếp.

Bài 5: Có 6 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6, 5 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5, 4 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 4. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu vừa khác màu, vừa khác số ?

HƯỚNG DẪN

+ Để lấy ra 3 quả cầu vừa khác màu vừa khác số, vậy ta phải chọn lấy lần lượt từ quả cầu có số lượng ít nhất để tránh trùng lặp.
+ Chọn 1 quả cầu vàng có 4 cách
+ Chọn 1 quả cầu đỏ có 5 - 1 = 4 cách (do không chọn lại quả có cùng số với quả vàng)
+ Chọn 1 quả cầu xanh có 6 - 2 = 4 cách (do loại đi 1 quả cầu xanh trùng với số quả cầu vàng và 1 quả cầu xanh trùng với số quả cầu đỏ đã chọn trước đó)
Vậy có 4.4.4 = 64 cách chọn.

Bài 6: Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hồng này xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn 1 bó hoa gồm 7 bông :
a) Có mấy cách chọn bó hoa trong đó có đúng 1 bông đỏ ?
b) Có mấy cách chọn bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông vàng và ít nhất 3 bông đỏ ?

HƯỚNG DẪN

a) Có 3 khả năng xảy ra :

$$\left[\begin{array}{l}\text{*TH1: 1 đỏ + 3 trắng + 3 vàng}\\ \text{*TH2: 1 đỏ + 2 trắng + 4 vàng}\\ \text{*TH3: 1 đỏ + 1 trắng + 5 vàng}\end{array}\right. \Rightarrow \text{ Vậy có } C_4^1.C_3^3.C_5^3+C_4^1.C_3^2.C_5^4+C_4^1.C_3^1.C_5^5=112 \text{ cách}$$

b) Có 3 khả năng xảy ra :

$$\left[\begin{array}{l}\text{*TH1: 3 vàng + 3 đỏ + 1 trắng}\\ \text{*TH2: 3 vàng + 4 đỏ}\\ \text{*TH3: 4 vàng + 3 đỏ}\end{array}\right. \Rightarrow \text{ Vậy có } C_4^3.C_5^3.C_3^1+C_5^3.C_4^4+C_5^4.C_4^3=150 \text{ cách}$$

(không có trường hợp 5 vàng)

Bài 7: Có 8 con tem và 5 bì thư. Chọn ra 3 con tem để dán vào 3 bì thư, mỗi bì thư dán 1 con tem. Hỏi có bao nhiêu cách dán ?

HƯỚNG DẪN

+ Chọn 3 con tem có C_8^3 cách

+ Chọn 3 bì thư có C_5^3 cách

+ Số cách dán là 3! cách

Vậy có $C_8^3.C_5^3.3! = 3360$ cách

Bài 8: Có 5 bưu thiếp khác nhau, 6 bì thư khác nhau. Chọn ra 3 bưu thiếp bỏ vào 3 bì thư, mỗi bì thư 1 bưu thiếp và gửi cho 3 người bạn, mỗi người bạn 1 bưu thiếp. Hỏi có mấy cách ?

HƯỚNG DẪN

+ Chọn 3 bưu thiếp từ 5 bưu thiếp có C_5^3 cách

+ Chọn 3 bì thư từ 6 bì thư có C_6^3 cách

+ Ghép 3 bưu thiếp với 3 bì thư có 3! cách

+ Trao 3 bì thư (đã có bưu thiếp bên trong) cho 3 người có 3! cách

Vậy có $C_5^3.C_6^3.3!.3! = 7.200$ cách

Bài 9: Tại cuộc thi "Theo dòng lịch sử", BTC sử dụng 7 thẻ vàng và 7 thẻ đỏ, đánh dấu mỗi loại theo các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp tất cả các thẻ này thành một hàng sao cho 2 thẻ cùng màu không nằm cạnh nhau ?

HƯỚNG DẪN

Hai thẻ cùng màu không nằm liền nhau tức là nằm xen kẽ nhau, ta có 2 TH sau :

+ TH1: Xếp thẻ vàng ở vị trí lẻ :

- Xếp thẻ vàng thứ nhất có 7 cách
- Xếp 6 thẻ vàng còn lại có 6! cách
- Xếp 7 thẻ đỏ xen kẽ vào 7 chỗ trống có 7! cách

+ TH2: Xếp thẻ đỏ ở vị trí lẻ :

- Xếp thẻ đỏ thứ nhất có 7 cách
- Xếp 6 thẻ đỏ còn lại có 6! cách
- Xếp 7 thẻ vàng xen kẽ vào 7 chỗ trống có 7! cách

Đáp số: Vậy có 7.6!.7! + 7.6!.7! = 50.803.200 cách

Bài 10: Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu TB, 4 câu khó. Người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ 3 loại dễ, TB, khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra ?

HƯỚNG DẪN

Sử dụng phương pháp phần bù

*** Bước 1:** Chọn 10 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^{10} cách

*** Bước 2:** Chọn 10 câu không thỏa mãn yêu cầu, ta có các TH sau:

+ TH1: Chọn 10 câu dễ và TB trong 16 câu có C_{16}^{10} cách

+ TH2: Chọn 10 câu dễ và khó trong 13 câu có C_{13}^{10} cách

+ TH3: Chọn 10 câu TB và khó trong 11 câu có C_{11}^{10} cách

Kết luận: vậy có $C_{20}^{10} - \left(C_{16}^{10} + C_{13}^{10} + C_{11}^{10}\right) = 176451$ đề kiểm tra thỏa mãn yêu cầu

(Chú ý: 9; 7; 4 < 10 nên không có TH đề kiểm tra chỉ có duy nhất 1 loại câu hỏi)

Bài 11: Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu TB và 4 câu khó. Người ta chọn ra 7 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ 3 loại dễ - TB - khó. Hỏi có bao nhiêu cách lập đề kiểm tra ?

HƯỚNG DẪN

Sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Chọn 7 câu bất kỳ trong 20 câu ta có C_{20}^7 cách chọn

* **Bước 2:** Chọn 7 câu không thỏa mãn yêu cầu, vậy có các trường hợp sau

+ **TH1:** 7 câu toàn dễ có C_9^7 cách

+ **TH2:** 7 câu toàn TB có C_7^7 cách

+ **TH3:** 7 câu dễ và TB có $C_{16}^7 - \left(C_9^7 + C_7^7\right)$ cách

(Giải thích: Sử dụng phương pháp phần bù

B1: Chọn 7 câu bất kỳ trong 16 câu có C_{16}^7 *cách*

B2: Chọn 7 câu không thỏa mãn yêu cầu có các TH

+ TH1: 7 câu toàn dễ có C_9^7 *cách*

+ TH2: 7 câu toàn TB có C_7^7 *cách*

Vậy để chọn 7 câu dễ và TB có $C_{16}^7 - \left(C_9^7 + C_7^7\right)$ cách)

+ **TH4:** 7 câu dễ và khó có $C_{13}^7 - C_9^7$ cách

(Giải thích: Sử dụng phương pháp phần bù

B1: Chọn 7 câu bất kỳ trong 13 câu có C_{13}^7 *cách*

B2: Chọn 7 câu không thỏa mãn yêu cầu vậy chọn 7 câu toàn dễ có C_9^7 *cách*

Vậy để chọn 7 câu dễ và khó có $C_{13}^7 - C_9^7$ *cách)*

+ **TH5:** Chọn 7 câu TB và khó có $C_{11}^7 - C_7^7$ cách

(Giải thích: Sử dụng phương pháp phần bù

B1: Chọn 7 câu bất kỳ trong 11 câu có C_{11}^7 *cách*

B2: Chọn 7 câu không thỏa mãn yêu cầu vậy chọn 7 câu toàn khó có C_7^7 *cách*

Vậy để chọn 7 câu TB và khó có $C_{13}^7 - C_9^7$ *cách)*

Kết luận: vậy có $C_{20}^7 - \left[C_9^7 + C_7^7 + C_{16}^7 - \left(C_9^7 + C_7^7\right) + C_{13}^7 - C_9^7 + C_{11}^7 - C_7^7\right] = \mathbf{64071}$ đề kiểm tra

Chú ý: Bài tập này đề kiểm tra có 7 câu (7 = 7; 7 < 9) nên có thể lập được đề toàn câu dễ, toàn câu TB

Bài 12 (KB - 2004): Trong 1 môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 khó, 10 TB, 15 dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, TB, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2 ?

HƯỚNG DẪN

+ Vì đề có 5 câu gồm đủ 3 loại (khó, TB, dễ), số câu dễ không ít hơn 2 $\Rightarrow$ số câu dễ chỉ có thể là 2; 3 (không thể là 4), do đó ta có các TH sau :

- **TH1:** Chọn 5 câu trong đó 2 dễ, 2 TB, 1 khó có $C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1$ cách

- **TH2:** Chọn 5 câu trong đó 2 dễ, 1 TB, 2 khó có $C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2$ cách

- **TH3:** Chọn 5 câu trong đó 3 dễ, 1 TB, 1 khó có $C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1$ cách

Vậy có $C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1 + C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2 + C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1 = 56.875$ đề kiểm tra

Bài 13: Đội tuyển HSG của 1 trường gồm 18 em, trong đó 7 em khối 12, 6 em khối 11, 5 em khối 10. Tính số cách chọn 6 em trong đội tuyển đi dự trại hè sao cho mỗi khối ít nhất 1 em được chọn.

HƯỚNG DẪN

Sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Chọn 6 em bất kỳ ta có: C_{18}^6 cách

* **Bước 2:** Chọn 6 em không thỏa mãn yêu cầu, vậy có các TH sau:

+ **TH1:** 6 em toàn khối 12 có C_7^6 cách

+ **TH2:** 6 em toàn khối 11 có C_6^6 cách

+ **TH3:** 6 em toàn khối 12 và khối 11 có $C_{13}^6 - \left(C_7^6 + C_6^6\right)$ cách

(Giải thích: sử dụng phương pháp phần bù

B1: Chọn 6 em bất kỳ có C_{13}^6 *cách*

B2: Chọn 6 em không thỏa mãn yêu cầu có các TH sau:

+ TH1: 6 em toàn khối 12 có C_7^6 *cách*

+ TH2: 6 em toàn khối 11 có C_6^6 *cách*

Vậy chọn 6 em toàn khối 12 và khối 11 có $C_{13}^6 - \left(C_7^6 + C_6^6\right)$ *cách)*

+ **TH4:** 6 em toàn khối 12 và khối 10 có $C_{12}^6 - C_7^6$ cách

+ **TH5:** 6 em toàn khối 11 và khối 10 có $C_{11}^6 - C_6^6$ cách

Kết luận: vậy có $C_{18}^6 - \left[C_7^6 + C_6^6 + C_{13}^6 - \left(C_7^6 + C_6^6\right) + C_{12}^6 - C_7^6 + C_{11}^6 - C_6^6\right] = \mathbf{15470}$ cách chọn

Bài 14: Từ 1 nhóm gồm 30 học sinh (15 học sinh khối A, 10 học sinh khối B, 5 học sinh khối C), chọn ra 15 học sinh sao cho có ít nhất 5 học sinh khối A và có đúng 2 học sinh khối C. Tính số cách chọn ?

HƯỚNG DẪN : sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Chọn 2 học sinh khối C, 13 học sinh còn lại tùy ý từ 25 học sinh (thuộc khối A và B) có $C_5^2.C_{25}^{13}$ cách

* **Bước 2:** Chọn 2 học sinh khối C, 13 học sinh còn lại chọn từ 25 học sinh (thuộc khối A và B) không thỏa mãn yêu cầu :

+ **TH1:** Chọn 2 học sinh khối C, 4 học sinh khối A, 9 học sinh khối B có $C_5^2.C_{15}^4.C_{10}^9$ cách

+ **TH2:** Chọn 2 học sinh khối C, 3 học sinh khối A, 10 học sinh khối B có $C_5^2.C_{13}^5.C_{10}^{10}$ cách

(các TH chọn 2 học sinh khối A, 11 học sinh khối B không tồn tại vì 11 > 10 …)

Đáp số: có $C_5^2.C_{25}^{13}$ - ($C_5^2.C_{15}^4.C_{10}^9 + C_5^2.C_{13}^5.C_{10}^{10}$) = 51.861.950 cách

Bài 15: Từ 1 nhóm gồm 12 học sinh (4 học sinh khối A, 4 học sinh khối B, 4 học sinh khối C) chọn ra 5 học sinh sao cho mỗi khối ít nhất 1 học sinh. Tính số cách chọn.

HƯỚNG DẪN: sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Chọn 5 học sinh tùy ý trong 12 học sinh có C_{12}^5 cách

* **Bước 2:** Chọn 5 học sinh không thỏa mãn yêu cầu bài toán:

+ **TH1:** 5 học sinh chỉ gồm khối A và B có C_8^5 cách

+ **TH2:** 5 học sinh chỉ gồm khối A và C có C_8^5 cách

+ TH3: 5 học sinh chỉ gồm khối B và C có C_8^5 cách

Đáp số: Vậy có C_{12}^5 - 3.C_8^5 = 624 cách

Bài 16: (ĐHKD - 2006) Đội thanh niên xung kích của một trưởng phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn ra 4 học sinh tham gia trực tuần, sao cho 4 học sinh đó không quá 2 trong 3 lớp nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

HƯỚNG DẪN: sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Chọn 4 học sinh trong 12 học sinh có $C_{12}^4 = 495$ cách

* **Bước 2:** Chọn 4 học sinh không thỏa mãn yêu cầu đề bài (đủ cả 3 lớp) có

$C_5^1.C_4^1.C_3^2 + C_5^1.C_4^2.C_3^1 + C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 270$ cách

Đáp số: Vậy có 495 - 270 = 225 cách.

Bài 17: Một đội văn nghệ có 20 người trong đó 10 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho có ít nhất 2 nam và có ít nhất 1 nữ ?

HƯỚNG DẪN: sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Chọn 5 người bất kỳ trong 20 người có C_{20}^5 cách

* **Bước 2:** Chọn 5 người không thỏa mãn yêu cầu :

+ TH1: Chọn 5 người toàn nữ có C_{10}^5 cách

+ TH2: Chọn 5 người toàn nam có C_{10}^5 cách

+ TH3: Chọn 1 nam và 4 nữ có $C_{10}^1.C_{10}^4$ cách

Đáp số: Vậy có C_{20}^5 - (C_{10}^5 + C_{10}^5 + $C_{10}^1.C_{10}^4$) = 12.900 cách

Bài 18: Lớp 11A của Tuấn có 11 học sinh nam và 18 học sinh nữ.
a) Có bao nhiêu cách chọn ra một đội văn nghệ gồm 10 người đủ nam và nữ.
b) Chọn 1 đội trực nhật gồm 13 người, trong đó có 1 tổ trưởng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu Tuấn luôn có mặt trong tổ và chỉ là thành viên ?

HƯỚNG DẪN

a) Sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Chọn 10 người bất kỳ trong 29 người có C_{29}^{10} cách

* **Bước 2:** Chọn 10 người không thỏa mãn yêu cầu :

+ TH1: Chọn 10 người toàn nam có C_{11}^{10} cách

+ TH2: Chọn 10 người toàn nữ có C_{18}^{10} cách

Đáp số: Vậy có C_{29}^{10} - (C_{11}^{10} + C_{18}^{10}) = 19986241 cách

b)

+ Chọn Tuấn luôn có mặt trong đội có 1 cách

+ Chọn 1 tổ trưởng có C_{28}^1 cách

+ Chọn 11 thành viên còn lại có C_{27}^{11}

Vậy có 1.$C_{28}^1.C_{27}^{11}$ = 216332480 cách

Bài 19: Một trường trung học có 7 thầy dạy Toán, 6 thầy dạy Lý và 4 thầy dạy Hóa. Chọn từ đó ra 5 thầy đi dự đại hội. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để có đủ 3 bộ môn ?

HƯỚNG DẪN: sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Chọn 5 thầy trong 17 thầy có C_{17}^5 cách

* **Bước 2:** Chọn 5 thầy không thỏa mãn yêu cầu :

+ **TH1:** Chọn 5 thầy dạy Toán + Lý có C_{13}^5 cách

+ **TH2:** Chọn 5 thầy dạy Toán + Hóa có C_{11}^5 cách

+ **TH3:** Chọn 5 thầy dạy Lý + Hóa có C_{10}^5 cách

+ **TH4:** Chọn 5 thầy dạy Toán có C_7^5 cách

+ **TH5:** Chọn 5 thầy dạy Lý có C_6^5 cách

Đáp số: Vậy có $C_{17}^5 - (C_{13}^5 + C_{11}^5 + C_{10}^5 + C_7^5 + C_6^5) = 4214$ cách

Bài 20 (KB - 2005): Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ ?

HƯỚNG DẪN

+ Có 3 tỉnh miền núi, ta gọi là A, B, C.

+ Tất cả có 15 người, chia cho 3 tỉnh, mỗi tỉnh 5 người.

+ Chọn đội thanh niên tình nguyện cho tỉnh A có $C_{12}^4.C_3^1$ cách

+ Chọn đội thanh niên tình nguyện cho tỉnh B có $C_{12}^4.C_2^1$ cách

+ Chọn đội thanh niên tình nguyện cho tỉnh C có $C_{12}^4.C_1^1$ cách

Vậy có $(C_{12}^4.C_3^1).(C_{12}^4.C_2^1).(C_{12}^4.C_1^1) = 207.900$ cách

Bài 21: Có 5 nhà Toán học nam, 3 nhà Toán học nữ, 4 nhà Vật lý nam. Muốn lập một đoàn công tác có 3 người gồm cả nam lẫn nữ, cần có cả nhà Toán học lẫn Vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách thành lập đoàn công tác như vậy ?

HƯỚNG DẪN

+ **TH1:** Chọn 1 nhà Toán học nam + 1 nhà Toán học nữ + 1 nhà Vật lý nam có $C_5^1.C_3^1.C_4^1$ cách

+ **TH2:** Chọn 2 nhà Toán học nữ + 1 nhà Vật lý nam có $C_3^2.C_4^1$ cách

+ **TH3:** Chọn 1 nhà Toán học nữ + 2 nhà Vật lý nam có $C_3^1.C_4^2$ cách

Vậy có $C_5^1.C_3^1.C_4^1 + C_3^2.C_4^1 + C_3^1.C_4^2 = 90$ cách.

Bài 22: Một đội văn nghệ có 15 người gồm : 10 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đội văn nghệ gồm 8 người sao cho có ít nhất 3 nữ ?

HƯỚNG DẪN : sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Chọn 8 người bất kỳ trong 15 người có C_{15}^8 cách

* **Bước 2:** Chọn 8 người không thỏa mãn yêu cầu (tức là dưới 3 nữ)

+ **TH1:** Chọn không có nữ (toàn nam) có C_{10}^8 cách

+ **TH2:** Chọn 1 nữ có $C_5^1.C_{10}^7$ cách

+ **TH3:** Chọn 2 nữ có $C_5^2.C_{10}^6$ cách

Vậy có $C_{15}^8 - (C_{10}^8 + C_5^1.C_{10}^7 + C_5^2.C_{10}^6) = 3.690$ cách

Bài 23: Lớp 11A của Tiến có 30 học sinh.
a) Hãy chọn trong lớp Tiến một tổ trực nhật có 11 người trong đó có 1 tổ trưởng, còn lại là các thành viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu Tiến luôn có mặt trong tổ ?

b) Hãy chọn trong lớp Tiến một đội văn nghệ có 8 người, trong đó có 1 đội trưởng, 1 thư ký và các thành viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu Tiến luôn có mặt trong đội ?

HƯỚNG DẪN

a) Khi Tiến luôn có mặt trong tổ thì Tiến có thể là tổ trưởng hoặc thành viên.

+ TH1: Nếu Tiến là tổ trưởng :

- Chọn Tiến làm tổ trưởng có 1 cách
- Chọn 10 thành viên còn lại có C_{29}^{10} cách

+ TH2: Nếu Tiến là thành viên :

- Chọn Tiến là thành viên có 1 cách
- Chọn 1 tổ trưởng có C_{29}^{1} cách
- Chọn 9 thành viên còn lại có C_{28}^{9} cách

Vậy tất cả có $1.C_{29}^{10} + 1.C_{29}^{1}.C_{28}^{9} = 220.330.110$ cách

b) Khi Tiến luôn có mặt trong tổ thì Tiến có thể là tổ trưởng, thư ký hoặc thành viên.

+ TH1: Nếu Tiến là tổ trưởng :

- Chọn Tiến làm tổ trưởng có 1 cách
- Chọn 1 thư ký có C_{29}^{1} cách
- Chọn 6 thành viên còn lại có C_{28}^{6} cách

+ TH2: Nếu Tiến là thư ký :

- Chọn Tiến là thư ký có 1 cách
- Chọn 1 tổ trưởng có C_{29}^{1} cách
- Chọn 6 thành viên còn lại có C_{28}^{6} cách

+ TH3: Nếu Tiến là thành viên :

- Chọn Tiến là thành viên có 1 cách
- Chọn 1 tổ trưởng có C_{29}^{1} cách
- Chọn 1 thư ký có C_{28}^{1} cách
- Chọn 5 thành viên còn lại có C_{27}^{5} cách

Vậy tất cả có $1.C_{29}^{1}.C_{28}^{6} + 1.C_{29}^{1}.C_{28}^{6} + 1.C_{29}^{1}.C_{28}^{1}.C_{27}^{5} = 87.403.680$ cách

Bài 24: Một tổ có 8 học sinh gồm 5 nữ và 3 nam. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các học sinh trong tổ đứng thành 1 hàng dọc để vào lớp sao cho :

a) Các bạn nữ đứng chung với nhau **b)** Nam nữ không đứng chung nhau

HƯỚNG DẪN

a)

+ Ta coi 5 bạn nữ luôn đứng chung với nhau là 1 nhóm X.
+ Ta xếp 1 nhóm X với 3 bạn nam coi như 4 bạn nên có 4! cách.
+ Tuy nhiên 5 bạn nữ trong nhóm X có 5! cách sắp xếp nữa.

Vậy có 4!.5! = 2880 cách.

b) Nam và nữ không đứng chung nhau nghĩa là xếp nam trước rồi đến nữ hoặc ngược lại

+ Coi 3 bạn nam luôn đứng riêng với nhau là 1 nhóm Y, 5 bạn nữ luôn đứng riêng với nhau là 1 nhóm X
+ Vậy ta coi như sắp xếp 2 học sinh X và Y nên có 2! cách
+ Tuy nhiên 3 bạn nam trong nhóm Y có 3! cách sắp xếp, 5 bạn nữ trong nhóm X có 5! cách sắp xếp

Vậy có 2!.3!.5! = 1440 cách.

Bài 25: Đội văn nghệ của trường gồm 10 học sinh trong đó có 3 bạn Lan, Hằng, Nga học cùng một lớp. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp đội văn nghệ thành 1 hàng dọc sao cho 3 bạn Lan, Hằng, Nga luôn đứng cạnh nhau ?

HƯỚNG DẪN

+ Ta coi 3 bạn Lan, Hằng, Nga luôn đứng cạnh nhau như 1 nhóm X.
+ Vậy sắp xếp 1 nhóm X với 7 học sinh còn lại coi như 8 học sinh nên có 8! cách.
+ Tuy nhiên 3 học sinh trong nhóm X lại có 3! cách sắp xếp.
Vậy có 8!.3! = 241.920 cách

Bài 26: Một đoàn tàu có 3 toa chở khách. Trên sân ga có 4 hành khách chuẩn bị lên tàu. Biết mỗi toa đều có 4 chỗ trống.
a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 4 hành khách lên tàu ?
b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 4 hành khách lên tàu để có 1 toa trong đó có 3 vị khách ?

HƯỚNG DẪN

a) Để 4 vị khách lên tàu, ta cần chọn ra 4 chỗ trống trong 12 chỗ trồng (do 3 toa, mỗi toa 4 chỗ) trên tàu, không liên quan đến thứ tự nên có $\mathbf{C_{12}^4 = 495}$ cách.

b)

+ Chọn 1 nhóm 3 vị khách từ 4 vị khách ta có $\mathbf{C_4^3}$ cách chọn
+ Nhóm 3 vị khách này khi lên tàu có thể chọn 1 trong 3 toa tàu nên có 3 cách chọn.
+ Vị khách còn lại khi lên tàu có thể chọn 1 trong 2 toa tàu (không chọn toa chứa 3 hành khách kia) nên có 2 cách chọn.
Vậy có $\mathbf{C_4^3}.3.2 = 24$ cách.

Bài 27: Một đoàn tàu có 4 toa đỗ ở sân ga. Có 4 hành khách bước lên tàu.
a) Có bao nhiêu trường hợp về cách chọn toa của 4 hành khách ?
b) Có bao nhiêu trường hợp mà mỗi toa có 1 người lên ?
c) Có bao nhiêu trường hợp mà 1 toa có 3 người lên, 1 toa có 1 người lên và 2 toa còn lại không có ai lên ?

HƯỚNG DẪN

a)
- Người thứ nhất có 4 cách chọn toa
- Người thứ hai có 4 cách chọn toa
- Người thứ ba có 4 cách chọn toa
- Người thứ tư có 4 cách chọn toa

Vậy có 4.4.4.4 = 256 cách chọn

b)
- Chọn vị trí để xếp người thứ nhất lên 1 trong 4 toa có $\mathbf{C_4^1}$ cách
- Chọn vị trí để xếp người thứ hai lên 1 trong 3 toa còn lại có $\mathbf{C_3^1}$ cách
- Chọn vị trí để xếp người thứ ba lên 1 trong 2 toa còn lại có $\mathbf{C_2^1}$ cách
- Chọn vị trí để xếp người cuối cùng lên 1 toa cuối cùng có $\mathbf{C_1^1}$ cách

Vậy có $\mathbf{C_4^1.C_3^1.C_2^1.C_1^1} = 24$ cách

c)

+ Chọn 1 nhóm 3 vị khách từ 4 vị khách ta có $\mathbf{C_4^3}$ cách chọn
+ Nhóm 3 vị khách này khi lên tàu có thể chọn 1 trong 4 toa tàu nên có 4 cách chọn.

+ Vị khách còn lại khi lên tàu có thể chọn 1 trong 3 toa tàu (không chọn toa chứa 3 hành khách kia) nên có 3 cách chọn.
Vậy có $C_4^3.4.3 = 48$ cách.

Bài 28: Cần chia 18 học sinh của lớp thành 3 nhóm sinh hoạt (không cần đặt tên cho nhóm, không quy định thứ tự), mỗi nhóm có 6 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chia ?

HƯỚNG DẪN

* Nhóm I: Chọn 6 học sinh từ 18 học sinh có C_{18}^6 cách

* Nhóm II: Chọn 6 học sinh từ 12 học sinh còn lại có C_{12}^6

* Nhóm III: Chọn 6 học sinh từ 6 học sinh cuối cùng có C_6^6

* Tuy nhiên, đề bài cho 3 nhóm không đặt tên, không quy định thứ tự nên khi hoán đổi 3 nhóm có 3! trường hợp lặp lại.

Vậy có $\frac{C_{18}^6.C_{12}^6.C_6^6}{3!} = 2.858.856$ cách

Bài 29: Trong một tổ học sinh của lớp 11A có 8 nam và 4 nữ. Thầy giáo muốn chọn ra 3 học sinh để làm trực nhật lớp học, trong đó phải có ít nhất 1 học sinh nam. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách chọn ?

HƯỚNG DẪN : sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Chọn 3 học sinh bất kỳ trong 12 học sinh có C_{12}^3 cách

* **Bước 2:** Chọn 3 học sinh toàn nữ có C_4^3 cách

Vậy có $C_{12}^3 - C_4^3 = 216$ cách

Bài 30 (KA - 2004) : Một lớp có 30 học sinh, trong đó có 3 cán bộ lớp. Có bao nhiêu cách chọn 3 em trong lớp để trực nhật tuần sao cho trong 3 em đó luôn có cán bộ lớp ?

HƯỚNG DẪN : sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Chọn 3 học sinh bất kỳ trong 30 học sinh có C_{30}^3 cách

* **Bước 2:** Chọn 3 học sinh không là cán bộ lớp trong 30 - 3 = 27 học sinh có C_{27}^3 cách

Vậy có $C_{30}^3 - C_{27}^3 = 1.135$ cách

Bài 31 : Ở một trường tiểu học có 50 em là học sinh giỏi, trong đó có 4 cặp em sinh đôi. Cần chọn ra 3 học sinh trong số 50 em để đi dự trại hè. Hỏi có bao nhiêu cách chọn mà trong đó không có cặp sinh đôi nào ?

HƯỚNG DẪN : sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Chọn 3 học sinh bất kỳ trong 50 học sinh có C_{50}^3 cách

* **Bước 2:** Chọn 3 học sinh không thỏa mãn yêu cầu :
(Tức là chọn ra 3 học sinh có 1 cặp sinh đôi - chỉ 1 cặp là tối đa, không thể 2 cặp vì 3 < 4)
+ Chọn cặp sinh đôi có 4 cách
+ Chọn 1 học sinh còn lại trong 48 em có C_{48}^1 cách

Vậy có $C_{50}^3 - 4.C_{48}^1 = 19.408$ cách

Bài 32: Trên một giá sách có 10 cuốn sách giáo khoa và 7 cuốn sách tham khảo.
a) Có bao nhiêu cách lấy 6 cuốn sách trong đó có 2 cuốn sách giáo khoa ?
b) Có bao nhiêu cách lấy 7 cuốn sách trong đó ít nhất 4 cuốn sách giáo khoa ?

HƯỚNG DẪN

a) Lấy 6 cuốn sách trong đó có 2 cuốn sách giáo khoa vậy sẽ có 4 cuốn sách tham khảo nên có $\mathbf{C_{10}^2.C_7^4=1575}$ cách.

b) Lấy 7 cuốn sách trong đó ít nhất 4 cuốn sách giáo khoa vậy có thể lấy 4 ; 5 ; 6 ; 7 cuốn sách SGK nên ta có $\mathbf{C_{10}^4.C_7^3+C_{10}^5.C_7^2+C_{10}^6.C_7^1+C_{10}^7.C_7^0=14232}$ cách

Dạng 2: CÁC BÀI TOÁN LẬP SỐ - CHỌN SỐ

Bài 1: Có thể lập thành bao nhiêu số có 8 chữ số, trong đó chữ số 1 và chữ số 6 đều có mặt 2 lần, các chữ số 2, 3, 4, 5 đều có mặt đúng 1 lần ?

HƯỚNG DẪN

Bài tập này số cần lập có 8 chữ số được lấy từ các chữ số {1; 6; 2; 3; 4; 5} (không có chữ số 0)

+ Chọn vị trí để xếp chữ số 1 có mặt 2 lần có $\mathbf{C_8^2}$ cách

+ Chọn vị trí để xếp chữ số 6 có mặt 2 lần có $\mathbf{C_6^2}$ cách

+ 4 vị trí còn lại cho 4 chữ số còn lại có 4! cách

Vậy có $\mathbf{C_8^2}.\mathbf{C_6^2}.4!$ = 10.080 cách

Bài 2: Cho tập hợp A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

a) Từ tập hợp A có thể lập được bao nhiêu số có 12 chữ số sao cho chữ số 5 có mặt 3 lần, chữ số 6 có mặt 4 lần, còn lại các chữ số khác có mặt 1 lần ?

b) Từ tập hợp A có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số sao cho có 1 chữ số lặp lại 4 lần, một chữ số khác lặp lại 2 lần và một chữ số khác với hai số trên ?

HƯỚNG DẪN

a)

+ Chữ số 5 có mặt 3 lần trong số có 12 chữ số nên có $\mathbf{C_{12}^3}$ cách chọn vị trí cho chữ số 5

+ Chữ số 6 có mặt 4 lần trong số 12 - 3 = 9 vị trí còn lại nên có $\mathbf{C_9^4}$ cách chọn vị trí cho chữ số 6

+ Còn 5 chữ số cuối cùng xếp vào 5 vị trí nên có 5! cách.

Vậy có $\mathbf{C_{12}^3}.\mathbf{C_9^4}.5!$ = 3.326.400 cách

b)

+ Có $\mathbf{C_7^4}$ cách chọn vị trí cho chữ số lặp lại 4 lần. Tuy nhiên vì chữ số lặp lại 4 lần này ta chưa biết là số nào nên có 7 TH xảy ra, vậy có $\mathbf{7.C_7^4}$ cách

+ Có $\mathbf{C_3^2}$ cách chọn vị trí cho chữ số lặp lại 2 lần. Tuy nhiên vì chữ số lặp lại 2 lần này ta chưa biết là số nào nên có 6 TH xảy ra, vậy có $\mathbf{6.C_3^2}$ cách

+ Còn 5 chữ số cuối cùng chỉ có thể xuất hiện 1 lần nên có 5 cách chọn.

Vậy có $(\mathbf{7.C_7^4}).(\mathbf{6.C_3^2}).5$ = 22050 số.

Bài 3: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3 ?

HƯỚNG DẪN

+ Ta coi chữ số 2 và 3 luôn đứng cạnh nhau như một "chữ số kép" X. Bài toán trở thành có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số X, 0, 1, 4, 5

+ Gọi số có 5 chữ số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$

- Chữ số $a_1 \neq 0$ nên có 4 cách chọn
- Các chữ số còn lại có 4! cách

+ Tuy nhiên 2 chữ số trong X lại có 2! cách sắp xếp

Vậy có 4.4!.2! = 192 số thỏa mãn.

Bài 4: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau và tổng của các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8 ?

HƯỚNG DẪN

+ Gọi số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.

+ Vì $a_3 + a_4 + a_5 = 8 \Rightarrow \{a_3, a_4, a_5\} \in \{1,2,5\};\{1,3,4\}$ nên có 2.3! cách chọn.

+ 3 chữ số còn lại có A_6^3 cách

Vậy có 2.3! . A_6^3 = 1440 số thỏa mãn yêu cầu.

Bài 5: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau mà mỗi số lập được đều nhỏ hơn 25000 ?

HƯỚNG DẪN

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là các số cần tìm

+ TH1: $a_1 = 1$ có 1 cách chọn, $a_5 \in \{0,2,4,6\}$ có 4 cách chọn, chọn 3 chữ số điền vào 3 vị trí còn lại có A_5^3 cách.

+ TH2: $a_1 = 2$ có 2 khả năng xảy ra :

- Nếu $a_5 \neq 6 \Rightarrow a_5 \in \{0;4\}$ có 2 cách chọn, $a_2 < 5 \Rightarrow a_2 \in \{0;1;3\}$ (không chọn lại 2) có 3 cách chọn, chọn 2 chữ số xếp vào 2 vị trí còn lại có A_4^2 cách.
- Nếu $a_5 = 6$ có 1 cách chọn , $a_2 < 5 \Rightarrow a_2 \in \{0;1;3;4\}$ (không chọn lại 2) có 4 cách chọn, chọn 2 chữ số xếp vào 2 vị trí còn lại có A_4^2 cách.

Đáp số: Vậy có 1.4. A_5^3 + 1.2.3. A_4^2 + 1.1.4. A_4^2 = 360 số thỏa mãn yêu cầu

(Chú khi khi làm bài này ở TH2 không thể gộp $a_5 \in \{0;4;6\}$ để xét chung được vì số 6 > 5 nên nếu nó rơi vào vị trí của a_2 thì sẽ không thỏa mãn)

Bài 6: Từ 3 chữ số 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, trong đó có mặt đủ cả 3 chữ số trên ?

HƯỚNG DẪN

Gọi số có 5 chữ số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$

Do 5 = 2 + 2 + 1 = 1+ 1 + 3 nên chỉ có 2 TH sau xảy ra thỏa mãn yêu cầu :

+ TH1: 2 số có 2 vị trí, 1 số còn lại có 1 vị trí có: $(C_5^2.C_3^2.1)3 = 90$ số (vì không xác định rõ các vị trí đó cho số nào, mà đề bài ta có 3 số, vậy kết quả phải nhân 3)

+ TH2: 2 số có 1 vị trí, 1 số còn lại có 3 vị trí có $(C_5^1.C_4^1.3)3 = 60$

Vậy có 90 + 60 = 150 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 7: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt đúng 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng 1 lần ?

HƯỚNG DẪN

+ TH1: Nếu chữ số thứ nhất là 1 có 1 cách sắp xếp, xếp 2 chữ số 1 còn lại vào 7 vị trí có C_7^2 cách, 5 vị trí còn lại có 5! cách sắp xếp.

+ TH2: Nếu chữ số thứ nhất khác 1 có 4 cách chọn (do chọn từ {2, 3, 4, 5}). Xếp 3 chữ số 1 vào 7 vị trí có C_7^3 cách, xếp 4 chữ số còn lại có 4! cách

Đáp số: Vậy có $1.C_7^2.5! + 4.C_7^3.4! = 5880$ cách

Bài 8: Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần ?

HƯỚNG DẪN

+ Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$

+ Chọn vị trí cho chữ số 2 xuất hiện 2 lần trong 7 vị trí có C_7^2 cách

+ Chọn vị trí cho chữ số 3 xuất hiện 3 lần trong 5 vị trí còn lại có C_5^3 cách

+ Còn 2 vị trí cuối cùng xếp 2 chữ số cuối cùng có 8.7 cách (2 chữ số này khác các chữ số đã chọn và khác nhau)

Vậy có $C_7^2.C_5^3.8.7 = 11760$ số

+ Ta thấy rằng trong 11760 số vừa tìm ở trên mới chỉ "gần thỏa mãn" yêu cầu bài toán vì trong đó có chứa cả số tự nhiên có 7 chữ số mà chữ số 0 đứng đầu (tức là số có 6 chữ số), vậy ta cần loại chúng đi bằng cách xét : $a_1 = 0 \Rightarrow$ Chọn vị trí cho chữ số 2 xuất hiện 2 lần trong 6 vị trí có C_6^2 cách, chọn vị trí cho chữ số 3 xuất hiện 3 lần trong 4 vị trí có C_4^3 cách. 7 vị trí cuối cùng xếp 7 chữ số còn lại có 7 cách (1; 4; 5; 6; 7; 8; 9). Vậy có $C_6^2.C_4^3.7 = 420$ số

Đáp số: có 11760 - 420 = 11.340 số thỏa mãn yêu cầu

CÁCH KHÁC

*** TH1 :** Số đó có chữ số 0

+ Đặt chữ số 0, có 6 cách đặt

+ Đặt 2 chữ số 2 vào 6 ô, có C_6^2 cách đặt

+ Đặt 3 chữ số 3 vào 4 ô, có C_4^3 cách đặt

+ Đặt 1 chữ số trong số 7 chữ số vào ô còn lại có C_7^1 cách đặt

Do đó TH1 số các số thỏa mãn là $6.C_6^2.C_4^3.C_7^1 = 2520$ số

*** TH2:** Số đó không có chữ số 0

+ Đặt 2 chữ số 2 vào 7 ô, có C_7^2 cách đặt

+ Đặt 3 chữ số 3 vào 5 ô, có C_5^3 cách đặt

+ Đặt 2 chữ số trong số 7 chữ số vào 2 ô còn lại có A_7^2 cách đặt

Do đó TH2 số các số thỏa mãn là $C_7^2.C_5^3.A_7^2 = 8820$ số

Vậy số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 2520 + 8820=11340 số

Bài 9: Từ các chữ số 0, 1, 2, …, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau sao cho trong các chữ số đó có mặt chữ số 0 và 1 ?

HƯỚNG DẪN

+ Chọn 1 vị trí để xếp số 0 có 5 cách.
+ Chọn tiếp 1 vị trí để xếp số 1 vào có 5 cách.
+ Còn 4 vị trí, còn 8 số. Lấy ra 4 số từ 8 số để xếp vào 4 vị trí còn lại có A_8^4 cách.

Vậy có 5.5.A_8^4 = 42.000 cách

Bài 10: Biển số xe là 1 dãy gồm 2 chữ cái đứng trước và 4 chữ số đứng sau : Các chữ cái được lấy từ 26 chữ cái A, B, C, …, Z. Các chữ số được chọn từ 10 chữ số 0, 1, 2, …, 9. Có bao nhiêu biển số xe có 2 chữ cái khác nhau, đồng thời có đúng 2 chữ số lẻ và 2 chữ số lẻ đó giống nhau ?

HƯỚNG DẪN

+ Biển số xe có dạng $\overline{A_1A_2a_1a_2a_3a_4}; A_i \in \{A, B, C, ..., Z\}, a_i \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$
+ Chọn 2 chữ cái khác nhau có A_{26}^2 cách
+ Chọn 2 số lẻ giống nhau co 5 cách (do chọn từ 1, 3, 5, 7, 9)
+ Chọn 2 trong 4 vị trí để đặt 2 chữ số lẻ giống nhau có C_4^2 cách
+ Sắp xếp 2 số chẵn từ 5 số (0, 2, 4, 6, 8) vào 2 vị trí còn lại có 5.5 cách

Vậy có $A_{26}^2.5.C_4^2.5.5$ = 487.500 biển số xe thỏa mãn yêu cầu

Dạng 3: CÁC BÀI TOÁN ĐẾM TRONG HÌNH HỌC

Bài 1: Xét đa giác đều có n cạnh, biết số đường chéo gấp đôi số cạnh. Tính số cạnh của đa giác đều đó

HƯỚNG DẪN

+ Chon 2 trong n đỉnh của n - giác ta sẽ có 1 cạnh hoặc 1 đường chéo.

$\Rightarrow$ tổng số cạnh và số đường chéo của n - giác là C_n^2

$\Rightarrow$ số đường chéo của n - giác là $C_n^2 - n$

+ Theo đề bài ta có phương trình: $C_n^2 - n = 2n \Leftrightarrow n = 7$

Vậy đa giác đều có 7 cạnh

(Bài này có thể dùng công thức tính số đường chéo của n - giác đều là $\frac{n(n-3)}{2}$ *(lớp 8), ta có phương trình* $\frac{n(n-3)}{2} = 2n \Leftrightarrow n = 7$ *)*

Bài 2: Tính số hình chữ nhật tạo thành từ 4 trong 20 đỉnh của đa giác đều có 20 cạnh nội tiếp đường tròn tâm O.

HƯỚNG DẪN

+ Ta thấy hình chữ nhật nội tiếp đường tròn tâm O được tạo thành từ 2 đường chéo bất kỳ đi qua tâm O của đa giác đều 20 cạnh nói trên.
+ Mà đa giác đều 20 cạnh nội tiếp đường tròn tâm O có 10 đường chéo đi qua tâm.

$\Rightarrow$ số hình chữ nhật cần tìm là $C_{10}^2 = 45$

Bài 3: (ĐHKB - 2002) Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ $(n \geq 2; n \in Z)$ nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$, tìm n.

HƯỚNG DẪN

+ Theo bài 6 ta có số các hình chữ nhật tạo thành từ đa giác đều 2n cạnh nội tiếp đường tròn (O) là C_n^2

+ Số tam giác tạo thành từ 3 trong 2n đỉnh của đa giác nói trên là C_{2n}^3

+ Theo đề bài ta có phương trình $C_{2n}^3 = 20.C_n^2 \Leftrightarrow n = 8$

Bài 4: Xét tam giác có 3 đỉnh lấy từ các đỉnh của đa giác đều H có 10 cạnh
a) Có tất cả bao nhiêu tam giác ? Có bao nhiêu tam giác có đúng 2 cạnh của H ?
b) Có bao nhiêu tam giác có đúng 1 cạnh là của H ? Có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào của H ?

HƯỚNG DẪN

a)

+ Có C_{10}^3 tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của H

+ Tam giác có đúng 2 cạnh là 2 cạnh của H được tạo bởi 3 đỉnh liên tiếp của đa giác H ($A_1A_2A_3...A_{10}$). Đó là các tam giác : $\Delta A_1A_2A_3;\Delta A_2A_3A_4;\Delta A_3A_4A_5;...;\Delta A_9A_{10}A_1;\Delta A_{10}A_1A_2$ nên có 10 tam giác

b)

+ Tam giác có đúng 1 cạnh của H được tạo ra bằng cách: chọn 1 cạnh bất kỳ của H (bỏ đi 4 đỉnh) nối với 1 trong 6 đỉnh của H. Vậy ứng với 1 cạnh bất kỳ của H nối với 6 đỉnh như vậy sẽ có 6 tam giác thỏa mãn. Mà H có 10 cạnh nên có 6.10 = 60 tam giác thỏa mãn.

+ Kết hợp phần a) ta có số tam giác không có cạnh nào của H là : $C_{10}^3 - (10 + 60) = 50$ tam giác

Bài 5: Cho 15 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Xét tập hợp các đường thẳng đi qua 2 trong 15 điểm đã cho. Số giao điểm khác 15 điểm đã cho do các đường thẳng này tạo thành là bao nhiêu ?

HƯỚNG DẪN

+ Số đường thẳng tạo thành từ 2 trong 15 điểm là $C_{15}^2 = 105$

+ Để tìm số giao điểm khác 15 điểm đã cho do các đường thẳng này tạo thành ta sử dụng phương pháp phần bù :

* **Bước 1:** Nếu coi 2 đường thẳng có 1 giao điểm thì ta có C_{105}^2 giao điểm

* **Bước 2:** Vì số giao điểm khác 15 điểm đã cho nên ta thấy rằng:

- Chọn 1 trong 15 điểm sẽ có 14 đường thẳng **đi qua** (vì không có 3 điểm nào thẳng hàng)

$\Rightarrow$ Chọn 1 điểm bất kỳ trong 15 điểm thì điểm đó phải là giao của C_{14}^2 **cặp** đường thẳng.

$\Rightarrow$ 15 điểm đã cho sẽ có $15.C_{14}^2$ cặp đường thẳng $\Rightarrow$ có $15.C_{14}^2$ giao điểm đi qua 15 điểm đã cho.

Đáp số: Vậy có $C_{105}^2 - 15.C_{14}^2 = 4095$ số giao điểm cần tìm

Bài 6: Cho 2 họ đường thẳng cắt nhau: Họ (L_1) gồm 10 đường thẳng song song với nhau, họ (L_2) gồm 15 đường thẳng song song với nhau. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành bởi (L_1) và (L_2) ?

HƯỚNG DẪN

+ Do các đường thẳng thuộc họ (L_1) song song, các đường thẳng thuộc họ (L_2) song song, mà 1 hình bình hành được tạo bởi 2 cặp đường thẳng song song cắt nhau.

+ Vậy chọn 2 đường thẳng bất kỳ trong họ (L_1) và 2 đường thẳng bất kỳ trong họ (L_2) sẽ có 1 hình bình hành $\Rightarrow$ có $C_{10}^2.C_{15}^2 = 4725$ hình bình hành (coi các đường thẳng họ (L_1) không song song các đường thẳng họ (L_2))

Bài 7: Cho hình thập giác lồi. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của thập giác lồi, nhưng cạnh của tam giác không phải là cạnh của thập giác lồi ?

HƯỚNG DẪN: sử dụng phương pháp phần bù

* **Bước 1:** Số tam giác tạo thành từ 3 đỉnh bất kỳ của thập giác lồi là C_{10}^3

* **Bước 2:** Ta tìm số tam giác có 3 đỉnh của thập giác lồi nhưng có ít nhất 1 cạnh là cạnh của thập giác lồi :

+ TH1: Tam giác có 1 cạnh của thập giác :

- Có 10 cách chọn 1 cạnh là cạnh của thập giác (chọn xong 2 đỉnh của tam giác)
- Chọn đỉnh còn lại có 6 cách *(trừ 2 đỉnh đã chọn và 2 đỉnh khác của thập giác kề với 2 đỉnh ấy)*

$\Rightarrow$ có 10.6 = 60 tam giác có 1 cạnh của thập giác

+ TH2: Tam giác có 2 cạnh của thập giác : Có 10 tam giác (Xem Bài 4)

Đáp số: Vậy số tam giác thỏa mãn yêu cầu là C_{10}^3 - (60 + 10) = 50

(Bài 7 này bản chất giống Bài 4 phần b)

Dạng 4: CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÂN CHIA TẬP HỢP

Bài 1: Cho tập hợp A gồm 15 phần tử khác nhau.
a) Có bao nhiêu cập hợp con của A ?
b) Có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của A mà số phần tử là số chẵn ?

HƯỚNG DẪN

a) Số các tập hợp con của A có thể có 0, 1, 2, 3, …, 15 phần tử $\Rightarrow$ số các tập hợp con của A là

$C_{15}^0 + C_{15}^1 + C_{15}^2 + C_{15}^3 + ... + C_{15}^{15}$

Theo công thức đếm số tập hợp con thì kết quả trên bằng 2^{15}

b) Số tập hợp con khác rỗng của A mà số phần tử là số chẵn là $C_{15}^2 + C_{15}^4 + C_{15}^6 + C_{15}^8 + ... + C_{15}^{14}$

+ Ta tính tổng trên bằng cách như sau : (Biến đổi về tập con có phần tử chẵn)

* Ta có :

$$C_{15}^0 + C_{15}^1 + C_{15}^2 + C_{15}^3 + ... + C_{15}^{14} + C_{15}^{15}$$
$$= C_{15}^0 + C_{15}^{14} + C_{15}^2 + C_{15}^{12} + ... + C_{15}^{14} + C_{15}^0$$
$$= 2\left(C_{15}^0 + C_{15}^2 + C_{15}^4 + C_{15}^6 + ... + C_{15}^{14}\right)$$
$$= 2.C_{15}^0 + 2.\left(C_{15}^2 + C_{15}^4 + C_{15}^6 + ... + C_{15}^{14}\right)$$

Từ đó :

$$\Rightarrow 2.\left(C_{15}^2 + C_{15}^4 + C_{15}^6 + ... + C_{15}^{14}\right) = C_{15}^0 + C_{15}^1 + C_{15}^2 + C_{15}^3 + ... + C_{15}^{14} + C_{15}^{15} - 2.C_{15}^0$$
$$\Rightarrow 2.\left(C_{15}^2 + C_{15}^4 + C_{15}^6 + ... + C_{15}^{14}\right) = 2^{15} - 2.C_{15}^0$$
$$\Rightarrow 2.\left(C_{15}^2 + C_{15}^4 + C_{15}^6 + ... + C_{15}^{14}\right) = 2^{15} - 2.1$$
$$\Rightarrow C_{15}^2 + C_{15}^4 + C_{15}^6 + ... + C_{15}^{14} = 2^{14} - 1$$

Bài 2: Cho tập hợp A gồm 20 phần tử khác nhau. Có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của A mà số phần tử là số chẵn ?

HƯỚNG DẪN

Số tập hợp con khác rỗng của A mà số phần tử là số chẵn là $C_{20}^2 + C_{20}^4 + C_{20}^6 + C_{20}^8 + ... + C_{20}^{20}$

+ Ta tính tổng trên bằng cách như sau : (Bài này không tính theo cách Bài 1 được vì 20 - 1; 20 - 3; 20 - 5; 20 - 7; … kết quả không ra số chẵn)

* Ta có :

$$C_{20}^0 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + C_{20}^3 + ... + C_{20}^{19} + C_{20}^{20} = 2^{20} = (1+1)^{20} \quad (1)$$

* Mặt khác ta có :

$$C_{20}^0 - C_{20}^1 + C_{20}^2 - C_{20}^3 + ... - C_{20}^{19} + C_{20}^{20} = 0^{20} = (1-1)^{20} \quad (2)$$

* Lấy (1) cộng với (2) vế theo vế ta được : $2\left(C_{20}^0 + C_{20}^2 + C_{20}^4 + C_{20}^6 + C_{20}^8 + ... + C_{20}^{20}\right) = 2^{20}$

$$\Rightarrow 2.C_{20}^0 + 2\left(C_{20}^2 + C_{20}^4 + C_{20}^6 + C_{20}^8 + ... + C_{20}^{20}\right) = 2^{20}$$

$$\Rightarrow C_{20}^2 + C_{20}^4 + C_{20}^6 + C_{20}^8 + ... + C_{20}^{20} = \frac{2^{20} - 2.C_{20}^0}{2} = 2^{19} - 1$$

Bài 3 (KB - 2006): Cho tập A gồm n phần tử $(n \ge 4)$. Biết số tập hợp con chứa 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập hợp con chứa 2 phần tử của A. Tìm số $k \in \{1,2,3,...,n\}$ sao cho số tập hợp con chứa k phần tử của A là lớn nhất .

HƯỚNG DẪN

+ Theo giả thiết ta có phương trình $C_n^4 = 20.C_n^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow n = 18$. Vậy A có 18 phần tử

+ Số tập hợp con chứa k phần tử của A là C_{18}^k

+ Để số tập hợp con chứa k phần tử của A là lớn nhất thì $\begin{cases} C_{18}^k \ge C_{18}^{k-1} \\ C_{18}^k \ge C_{18}^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \frac{17}{2} \le k \le \frac{19}{2} \Rightarrow k = 9$

NGUYỄN HỮU BIỂN

Fb: https://www.facebook.com/nguyenhuubien1979

Nhóm ôn thi ĐH môn toán: https://www.facebook.com/groups/nguyenhuubien